张鸿庆 王鸣 著

有限元的数学理论

科学出版社

有限元的数学理论

张鸿庆　王　鸣　著

（国家自然科学基金资助项目）

科　学　出　版　社

1991

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书系统地论述了有限元方法的数学理论. 全书共分两个部分. 第一部分介绍有限元方法发展的历史，以及必要的数学基础知识. 内容包括: 变分法原理与变分法、Hilbert空间、以能量为长度的几何、有限元理论的直观背景. 第二部分详细介绍有限元方法的数学理论. 内容包括: 有限元空间、有限元的基本条件、有限元空间的基本性质和有限元方法.

本书读者范围: 大专院校计算数学、工程力学专业的师生、科研人员、工程技术人员.

有限元的数学理论

张鸿庆　王　鸣　著

责任编辑　林　鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1991年12月第一版　开本：850×1168 1/32

1991年12月第一次印刷　印张：12

印数：0001—2 000　字数：317 000

ISBN 7-03-002560-1/O·483

定价：13.10元

序　言

有限元方法是近一二十年来发展起来的重要方法. 近年来，有限元方法除了传统的协调元方法以外，还发展到非协调元、杂交元、混合元和拟协调元方法. 本书介绍有限元的数学理论，它在拟协调元方法的基础上将上述有限元方法统一到多变量有限元理论中. 此外利用我们提出的多变量有限元的逼近性、弱闭性、嵌入性和紧致性，统一地证明上述各种单元的收敛性，给出了构造有效单元的方法.

有限元方法在工程技术中有着广泛的应用. 但有限元数学理论是以 Sobolev 空间理论为基础的，许多工程技术人员由于不懂泛函分析等数学基础知识，无法了解有限元数学理论的现状. 为了使广大的非数学工作者能够了解有限元方法的数学基础，本书的第一部分介绍有关的基础知识和有限元理论的直观背景. 与传统的数学书不同，第一部分不强调推理的严格性而采用直观性推理方法. 对每个定理先根据物理的直观背景，并利用几何类比或代数类比使读者猜出这个定理的结论，然后力求用形象的方法使读者对这个定理的正确性有深刻的理解. 此外还介绍了数学思想的发展过程，从科学史的观点论述一些基本思想如何影响到有限元数学理论的发展.

第二部分介绍有限元空间的构造方法、有限元的基本假设、建立在这些假设基础上的有限元空间的基本性质及其应用，以及线性微分方程的有限元收敛性. 还结合拟协调元技巧给出有限元空间的构造方法，这一方法包括了协调元和非协调元方法，它们之间有本质的区别：不要求导数关系在单元上点点成立，只是在弱形式下的近似成立. 对于这样的有限元空间，详细地讨论了它们的逼近性、弱闭性、嵌入性和紧致性等性质. 这些性质在微分方程的有

限元方法收敛性讨论中，起着决定性的作用。我们把保证这些性质成立的条件归结为有限元的仿射连续性、尺度不变性、弱连续性、逼近性、单元秩条件和强 F-E 检验的假定。这些假定易于验证，适用范围广泛，而且具有力学意义。

由于本书在编写方法上与其它书不同，加之我们的学识有限，难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

在本书的写作过程中，作者得到了唐立民教授、钱伟长教授、卞学璜教授的热情支持，应隆安教授细致地审阅了本书，并提出了不少富有建设性的意见，在此对他们表示衷心的感谢。

作　者

1991 年于北京

目　录

第一章　变分原理与变分法

§1.1　变分法的起源和例子

从自然科学史来看，古人对自然规律的一个重要观点就是，大自然不做多余的事情，总是以数学上可能最好的方式安排一切．例如，光的传播路径是直线，而两点之间的距离以直线为最短，所以光线走的是最短路径．早在 Euclid 时代就已经知道，在光线反射时，入射角等于反射角；亚历山大城的数学家 Heron 证明了光线实际取的路径仍是所有可能路径中最短的路径．例如光线从 A 点出发遇到平面 CE 而反射到 B 点，则 $\angle ACD=\angle BCD$．如果在 CE 平面上任取一点 E，容易证明 $AE+BE>AC+BC$，因此光线在反射时走的路径是所有可能路径中最短的路径．根据这一点，以及哲学和美学上的考虑，便有人认为大自然总是以可能最好的方式作出安排，这个观点为许多科学家和哲学家所接受．后来人们又发现了光的折射现象，从介质 I 的 A 点到介质 II 的 B 点，光线走的不是最短距离（图 1.1.2），这些科学家和哲学家们的信仰发生了动摇．而著名数学家 Fermat 怀疑折射定律是否正确．后来他发现，由于 I 和 II 是不同介质，光线的传播速度不

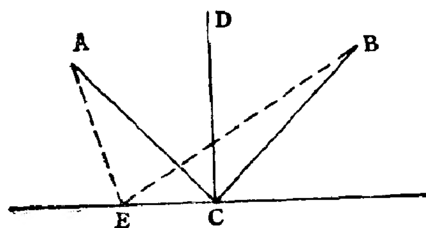


图 1.1.1

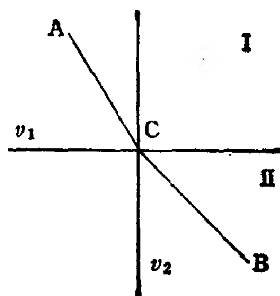


图 1.1.2

同，从A到B经过C点，虽然并非最短距离，但时间却最短。对均匀介质速度不变，最短时间与最短距离是一致的，但若速度不同，两者就不一样了。比如从A到C是步行，但C处有汽车，从C到B乘车，这样花费的时间比从A直线步行到B花费的时间还要少.因此 Fermat 提出最小时间原理，即在从A到B的所有可能的途径中，光线的实际途径是花费时间最短的途径。Fermat 不仅利用这个原理推出了光的折射定律，而且还利用这个原理解释了在均匀介质中光的传播和反射，Huygens 把这个原理推广到具有变折射率的介质上。后来 Bernoulli, Euler 和 Lagrange 创立变分法，指出从变分原理可以推出 Newton 力学。 Maupertuis 积极鼓吹最小作用量原理，认为它是宇宙的普遍原理. 以后 Hamilton 提出著名的 Hamilton 原理： 设T是体系的动能，U是体系的势能，$L=T-U$ 是体系的 Lagrange 函数，则从时刻 t_0 到时刻 t_1 的真实运动使积分 $J=\int_{t_0}^{t_1}Ldt$ 取最小值。Helmholtz 把这个原理应用于一系列非力学过程。热传导理论、电动力学、量子力学、广义相对论和量子场论都可以广泛应用这个原理。

前面说过，变分原理是宇宙的基本原理之一，有限元方法也是这个原理的产物。在叙述变分原理之前，我们先扼要介绍一下变分法的基本知识。所谓变分法就是寻求泛函极值的一门学问。为了便于理解变分问题，我们从历史上有名的几个问题讲起。

1. 最速降线问题

这个问题是 John Bernoulli 向其它数学家挑战时提出的.假设B点不在A点的垂直下方，在从A到B的所有曲线中，选择一条曲线，使得一质点沿这条曲线从A点滑到B点所用时间最短，这里摩擦和空气阻力都忽略不计。从A到B当然直线距离最短，但速度未必最大，因此时间未必最短。 质点从A到P，势能减少mgy，而获得动能$\frac{1}{2}mv^2$（这里假设初速度为零），v是质点在P点时的

速度．由能量守恒定律，$v=\sqrt{2gy}$，于是，

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy},$$

此处 y 是 P 点的纵坐标．

显然

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

这里用到

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

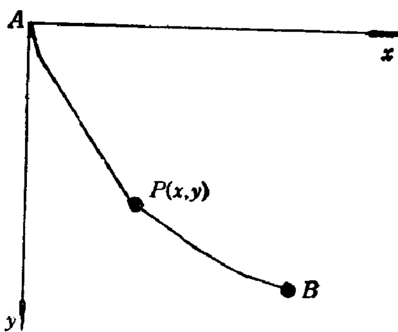


图 1.1.3

从 A 到 B 积分，设总降落时间为 T，即得

$$T=\int_0^T dt=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx,$$

其中 x_1 是 B 点的横坐标．最速降线问题为：在满足 $y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$ 的一切函数 $y(x)$ 中，选出一个函数 $y(x)$，使

$$J(y)=\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx \tag{1.1.1}$$

取最小值．注意在 (1.1.1) 中，给定一个 $y(x)$，就有一个 J 的数值与之对应，所以 J 可以看成是曲线 $y(x)$ 的函数．这里自变量是函数或者说是曲线，这样的函数 $J(y)$ 叫做泛函．泛函和函数不同，它的自变量是函数而不是数，它和复合函数也不同．设

$$y=f(g(x)),$$

y 是 g 的函数，g 是 x 的函数，从而 y 是 x 的函数，即 y 是一个复合函数．但是在 $J(y)$ 中把 y 看成一个整体，$J(y)$ 只是 y 的函数，而不是 x 的函数，只有给定 $y(x)$ 才有一个 $J(y)$ 与它对应，给定 x 的一个值，无法确定 J 的相应值，这样的函数叫做泛函．而最速降线问题就是求形如 (1.1.1) 的泛函在条件

$$y(0)=0,\ y(x_1)=y_1$$

下的极小值，这样的问题就是变分法所要研究的问题。

2. 短程线问题

所谓短程线就是从一点到另一点的距离最短的线。显然平面上的短程线就是直线，而曲面上的短程线则可能是曲线，例如球面上的短程线是过球心的大圆，柱面上的短程线是螺旋线，植物爬蔓就是爬的短程线。一般地说，如果曲面能象柱面一样展成平面，那么在展开曲面上为直线的那些点就构成曲面上的短程线。由于多数曲面不能展成平面，所以求任意曲面的短程线并非是一个简单的问题。设 A 和 B 是曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上给定的两点，过 A 和 B 两点的短程线就是连结 A 和 B 两点距离最短的线。设 A 点坐标为 (x_1,y_1,z_1)，B 点坐标为 (x_2,y_2,z_2)，在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上连结 A 和 B 的曲线的方程为 $y=y(x),z=z(x)$，则从 A 到 B 的曲线的长度为

$$L=\int_{x}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx. \tag{1.1.2}$$

短程线问题可以叙述为：在一切满足条件

$$\begin{gathered}\varphi(x,y(x),z(x))=0,\\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2,\\ z(x_1)=z_1,\ z(x_2)=z_2\end{gathered} \tag{1.1.3}$$

的函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 中选取一对 $y=y(x)$，$z=z(x)$，使 L 最小。

在 (1.1.2) 中 L 是 $y(x)$ 和 $z(x)$ 的函数，所以 L 也是一个泛函，短程线问题就是在条件 (1.1.3) 下求泛函 L 的极小值，这样的问题也属于变分法的研究范围。

短程线问题不仅有重要的几何意义，也有重要的物理意义。光线在均匀介质中走的是短程线，不受外力作用的物体走的也是短程线，也就是直线。但在 Einstein 的广义相对论中，时间和空间联系在一起，并且是有曲率的，光线走的是四维 Riemann 时空中的

短程线，这时的短程线已不是一条直线，这个问题也是一个变分法的问题.

3. 等周问题

所谓等周问题就是在长度一定的闭曲线中，什么曲线所围的面积最大. 这个问题在古希腊时代就知道答案是个圆. 相传古代有个叫 Dido 的公主，因为犯了过失被贬，只给她一张牛皮大小的土地. 这个公主把牛皮割成许多细条，结成一根绳子，以海岸作为一边，将绳子围成半圆形，这块土地就成了她的封地. 她在这块土地上建立了伽太基城. 可见这个问题已有悠久的历史. 这个问题的答案虽然早就有了，然而求这类问题的系统方法却是变分法产生以后的事. 假设所考虑的曲线用参数形式表示:

$$x = x(s),\ \ y = y(s),$$

其中 s 是参数. 设 $x_1 = x(s_1)$, $y_1 = y(s_1)$ 是曲线上一个给定点，当 s 变化时点 (x,y) 沿着曲线移动. 由于曲线是封闭的，必存在一个 s_2 使点 $x_2 = x(s_2)$, $y_2 = y(s_2)$ 与 (x_1,y_1) 重合，因此曲线周长可表示成

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds.$$

这条曲线所围成的面积为

$$R = \iint_{\Omega} dxdy,$$

其中 Ω 是这条曲线所围成的区域. 在 Green 公式

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy$$

中取 $P = -\dfrac{y}{2}$, $Q = \dfrac{x}{2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

于是

$$R = \iint_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} xdy - ydx,$$

从而

$$R = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2} (xy'(s) - yx'(s))ds. \tag{1.1.4}$$

等周问题就是在条件

$$x(s_1) = x(s_2),\ y(s_1) = y(s_2),$$
$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds = L \tag{1.1.5}$$

下求泛函 R 的极值，这也是变分法讨论的问题.

4. Fermat 原理

Fermat 原理指出：光通过介质的路径，与其他假想路径相比，所需的时间为最小值. 以二维空间为例，设介质的折射率为 $\mu(x,y)$，而光线通过介质的速度 $v(x,y) = \frac{c}{\mu(x,y)}$，其中 c 是真空中光速，是一个常数. 从原点 (0, 0) 到 (x_1, y_1) 所需时间为

$$T = \int_0^l \frac{ds}{v} = \frac{1}{c}\int_0^{x_1} \mu(x,y)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx, \tag{1.1.6}$$

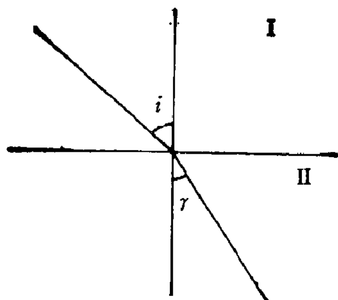


图 1.1.4

其中 $y = y(x)$ 为光线通过的路径，l 是路径的长度，Fermat 原理就是求 $y = y(x)$ 使泛函 (1.1.6) 取极小值.

取 $\frac{1}{c}\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2gy}}$，则 Fermat 原理与最速降线问题等价.

根据 Snell 条件

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2},$$

v_i 是光在第 i 个介质中的速度．取第一介质为真空，$\frac{c}{v}=\mu$，μ 是折射率，据此可用作图方法做出最速降线．

§1.2 变分问题的解法，Euler 方程

现在我们考虑如下的问题：在满足条件

$$y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2 \tag{1.2.1}$$

的函数中求函数 $y(x)$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \tag{1.2.2}$$

取极值，我们的目的是对这类问题给出一个一般的解法． 这是一个求泛函极值的问题，我们是不会解的，但是对普通函数求极值已有了一套成熟的方法．因此我们试图把不会解的问题转化成会解的问题，也就是把求泛函的极值转化成求普通函数的极值． 为此我们假设 $y_0(x)$ 是要求的解，$\delta y(x)$ 满足条件

$$\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0,$$

则 $y(x)=y_0(x)+\varepsilon\delta y(x)$ 满足条件 (1.2.1)，将 $y(x)$ 代入 (1.2.2) 就有

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_0(x)+\varepsilon\delta y(x),\ y_0'(x)+\varepsilon\delta y'(x))dx, \tag{1.2.3}$$

这里 ε 是任意实数． 注意在 (1.2.3) 中 $y_0(x)$ 和 $\delta y(x)$ 都是给定的函数，只有 ε 可以任意变动，因此 $J(y)$ 实际是 ε 的函数，不妨记以 $\Pi(\varepsilon)$．如果以 $\Pi(\varepsilon)$ 代替 $J(y)$，y_0 代替 $y_0(x)$，δy 代表 $\delta y(x)$，$\delta y'$ 代替 $(\delta y(x))'$，则 (1.2.3) 可以写成

$$\Pi(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')dx. \tag{1.2.4}$$

既然泛函 $J(y)$ 在 $y=y_0(x)$ 时取极值，那么相应的 $\Pi(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon=0$ 时取极值．由于 ε 是普通的数，$\Pi(\varepsilon)$ 是普通的函数，所以我们已经把求泛函极值问题转化为求普通函数的极值问题．既

然当 $\varepsilon = 0$ 时，$\Pi(\varepsilon)$ 取极值，那么由数学分析的知识可知

$$\Pi'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

根据复合函数求导的法则，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2}\Bigg[\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y} \\
&\quad \cdot\frac{d(y_0+\varepsilon\delta y)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y'} \\
&\quad \cdot\frac{d(y_0'+\varepsilon\delta y')}{d\varepsilon}\Bigg]dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2}\Bigg[\frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y}\delta y \\
&\quad + \frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0+\varepsilon\delta y')}{\partial y'}\delta y'\Bigg]dx,
\end{aligned}$$

在上式中令 $\varepsilon = 0$，就有

$$\frac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx, \tag{1.2.5}$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0+\varepsilon\delta y')}{\partial y}\bigg|_{\varepsilon=0},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F(x,y_0+\varepsilon\delta y,y_0'+\varepsilon\delta y')}{\partial y'}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

我们把 $\dfrac{d\Pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$ 叫做泛函 $J(y)$ 的变分，记以 δJ，泛函的变分相当于函数的导数。(1.2.5) 也可以写成

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\delta F dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx, \tag{1.2.6}$$

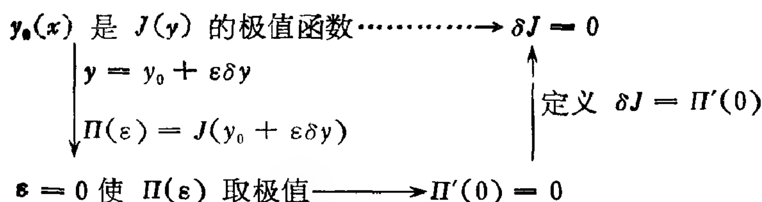
其中 $y = y_0(x)$. 由于 $y_0(x)$ 是使 $J(y)$ 取极值的函数，因此

$$\delta J = 0,$$

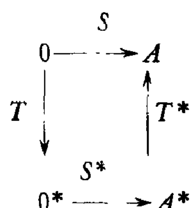
亦即

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx = 0, \tag{1.2.7}$$

(1.2.7) 是 $y_0(x)$ 使 $J(y)$ 取极值的必要条件。就象 x_0 使 $f(x)$ 取极值的必要条件是 $f'(x)=0$ 一样。这个过程用图表示如下：



设 0 是原来的问题，A 是问题的答案，S 是解题过程，T 是变换：$0\to0^*$，T^* 是变换：$A^*\to A$，则有



因此，$S=T^*S^*T$。

例如设 S 是眼、脑、手，S^* 是感受器、控制器、效应器。T：象的重量→石头重量，S^* 是称石头，S 是称象，T^*：石头重量→象的重量，这就把称象的问题变成称石头的问题。这个原则在控制论中叫共轭控制，在方法论中叫关系反演映射原则。

(1.2.7) 不便于应用，必须加以改变，怎么变呢？我们有这样一个经验："当你不知道下一步怎么办时，就去做分部积分."分部积分是变换形式的好方法，我们不妨试一下。将(1.2.7)左端第二项分部积分就有

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}d(\delta y)=\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_1}$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta ydx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta ydx,$$

这里用到了条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$。将上式代入 (1.2.7) 得到

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta ydx=0. \qquad (1.2.8)$$

由于 δy 是满足条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$ 的任意函数，所以在区间 (x_1,x_2) 上

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{1.2.9}$$

这里最后一步用到所谓变分法基本原理：

定理 1.2.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若对任意满足

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0$$

的函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0,$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处为零。

证明 用反证法。假设 x_0 是 (a, b) 中的点，在 x_0 处 $f(x)\neq 0$，不妨设 $f(x_0)>0$，则由于 $f(x)$ 是连续函数，故存在 x_0 的一个充分小的完全包含在 $[a,b]$ 内的邻域，使得在这个邻域内 $f(x)>0$。如果我们选择 $\varphi(x)$ 使 $\varphi(x)$ 在这个邻域内大于零，而在这个邻域外恒等于零，并且 $\varphi(x)$ 是连续函数，显然

$$\varphi(a)=\varphi(b)=0.$$

由于在小邻域上 $f(x)>0$，$\varphi(x)>0$，且在小邻域外 $\varphi(x)=0$，所以有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx>0.$$

这与定理条件 $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$ 矛盾。因此 $f(x_0)$ 不能大于零。同理可证它也不能小于零，所以定理结论成立。

利用变分法基本引理及(1.2.8)立即推出 (1.2.9) 式。方程 (1.2.9) 叫做 Euler 方程。根据上面的推导可知，若在任意满足条件 (1.2.1) 的函数中，$y_0(x)$ 使泛函 $J(y)$ 取极值，则 $y_0(x)$ 是微分方程边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\\ y(x_1)=y_1,\ y(x_2)=y_2\end{cases} \tag{1.2.10}$$

的解。下面以最速降线问题为例，说明(1.2.10)的应用.

例 1.2.1 现在我们用 (1.2.10) 来求解最速降线问题. 由 (1.1.1) 可知:

$$F(x,y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}},$$

注意到在最速降线问题中 $F(x, y, y')$ 不含 x，我们可以得到 Euler 方程的一个积分. 事实上，将方程 (1.2.9) 乘以函数 Q 可得

$$Q\frac{\partial F}{\partial y}-Q\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=Q\frac{\partial F}{\partial y}+Q'\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{d}{dx}(QF_{y'})=0,$$

由于 $\frac{\partial F}{\partial x}=0$，因此在上式中只要令 $Q=y'$，就可以把上式右端配成全微分形式，事实上，上式可以写成

$$\frac{d}{dx}\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right)=0,$$

从而有

$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}y'=C, \tag{1.2.11}$$

其中 C 是任意常数. 对于最速降线问题，(1.2.11) 可以写成

$$F-\frac{\partial F}{\partial y'}y'=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C,$$

从而

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{C^2},$$

由于 $\frac{1}{C^2}$ 也是任意常数，所以上式可以写成

$$y(1+y'^2)=C \text{ 或 } y=\frac{C}{1+y'^2}.$$

令 $y'=\mathrm{ctg}\,t$，则

$$y=\frac{C}{1+\mathrm{ctg}^2 t}=C\sin^2 t=\frac{C}{2}(1-\cos 2t),$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C \sin^2 t dt$$

$$= C(1 - \cos 2t)dt,$$

上式积分可得

$$x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t) + C_1.$$

引用初始条件 $x = 0$, $y = 0$, 则有 $C_1 = 0$. 用新参数 $\theta = 2t$, 便得到最速降线问题解曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta), \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos\theta), \end{cases}$$

这个问题的解答分别由 Newton, Leibniz, L'Hospital John Bernoulli, James Bernoulli 给出。

用 Euler 方程能解决许多变分问题，但从培养能力的角度来看，套用书上的公式解决问题不算有能力，要自己想办法用新的途径得到解答. 最速降线问题，可以看成是在 $\mu(x, y) = \frac{C}{\sqrt{2gy}}$ 的介质中光线的传播问题. 将介质看成分片均匀的，用几何作图的方法可以求得这种传播的轨迹.

短程线问题可以考虑近似解法，一本打开的书张成 α 角，从书脊的这侧到那一侧的短程线应该如何构造，这个问题是容易解决的. 任何曲面总可以用分片平面逼近，这就给我们提供了一个思路. Hilbert 认为，一个问题不会解决，往往是因为有一个比这个问题更简单的问题你还没有解决。

短程线问题的推广是最小曲面问题，即求张在指定曲线上的面积最小的曲面，这个问题可以由皂膜实验解决，用实验办法解决变分问题是有意思的。

等周问题的答案也可以猜到，先从三角形研究，设底边及周长给定，可能顶点的轨迹构成一个椭圆，显然在 C 点时面积最大(图

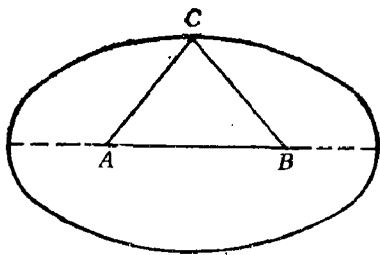


图 1.2.1

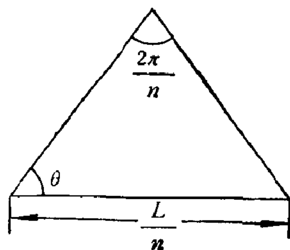


图 1.2.2

1.2.1)，其次研究正多边形，无妨假定图形是凸的，用上面结果可证明各边必须相等．再者研究边数增加且周长不变时多边形的面积是否增加．事实上设 L 为周长，则

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{n-2}{2n}\pi,$$

$$S_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\frac{L^2}{4n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

可以猜想 S_n 是单调增加的．考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$，

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\frac{\cos\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}+\frac{\pi}{x^3}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{x}}=\frac{\pi-x\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}}{x^3\sin^2\frac{\pi}{x}}.$$

由于 x 充分大时，$f'(x)>0$，从而当 n 增大时，S_n 增大．当 n 充分大时 $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\approx\frac{1}{\frac{\pi}{n}}$，故 $S_n\to\frac{L^2}{4\pi}\ (n\to\infty)$．

而$\frac{L^2}{4\pi}$ 正是周长为 L 的圆的面积．因此可以猜出问题的答案应该是圆．

现在考虑待定函数为二元函数的情形．设 Ω 是边界充分光滑的二维区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，我们的问题是，在满足条件

$$w|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.2.12}$$

的函数中找一个函数使泛函

$$J(w)=\iint_{\Omega} F(x,y,w(x,y),w_x(x,y),w_y(x,y))d\Omega \quad (1.2.13)$$

取极值。与前面类似，设 $w_0(x,y)$ 是问题的解，$\delta w(x,y)$ 是满足条件 (1.2.12) 的任意函数，令

$$w(x,y)=w_0(x,y)+\varepsilon w(x,y),$$

并代入 (1.2.13) 就有

$$J(w)=\iint_{\Omega} F(x,y,w_0+\varepsilon\delta w,w_{0x}+\varepsilon(\delta w)_x,w_{0y}$$

$$+\varepsilon(\delta w)_y)d\Omega,$$

其中 $w_{0x}=\dfrac{\partial w_0}{\partial x}$，$w_{0y}=\dfrac{\partial w_0}{\partial y}$，$(\delta w)_x=\dfrac{\partial\delta w}{\partial x}$，$(\delta w)_y=\dfrac{\partial\delta w}{\partial y}$.

由于 w_0 和 δw 是给定的函数，所以 $J(w)$ 可以看成 ε 的函数，记以 $\Pi(\varepsilon)$。令 $\delta J=\left.\dfrac{d\Pi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$，$\delta J$ 叫做 J 的变分或一次变分。直接对 $\Pi(\varepsilon)$ 微分可以得到

$$\delta J=\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w_y}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}\right\}d\Omega,$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial w}=\left.\frac{\partial F(x,y,w_0+\varepsilon\delta w,w_{0x}+\varepsilon(\delta w)_x,w_{0y}+\varepsilon(\delta w)_y)}{\partial w}\right|_{\varepsilon=0},$$

$\dfrac{\partial F}{\partial w_x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial w_y}$ 意义类似。由于 w_0 是问题的解，所以有 $\delta J=0$，亦即

$$\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w_y}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}\right\}d\Omega=0.$$

$$(1.2.14)$$

(1.2.14) 式使用不方便，必须改变形式。为此我们还是用分部积分法。一元函数的分部积分为

$$\int_a^b uv'dx=uv\Big|_a^b-\int_a^b vu'dx,$$

二元函数的分部积分可以由 Gauss 公式推出，事实上，在 Gauss

公式

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)d\Omega=\int_{\partial\Omega}(P\cos(n,x)+Q\cos(n,y))ds$$

中令 $Q=0$，则有

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}d\Omega=\int_{\partial\Omega}P\cos(n,x)ds,$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 的外法向量，令 $P=uv$，则有

$$\iint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial x}d\Omega=\int_{\partial\Omega}uv\cos(n,x)ds-\iint_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega. \tag{1.2.15}$$

类似地有

$$\iint_{\Omega}u\frac{\partial v}{\partial y}d\Omega=\int_{\partial\Omega}uv\cos(n,y)ds-\iint_{\Omega}v\frac{\partial u}{\partial y}d\Omega. \tag{1.2.16}$$

这就是二元函数的分部积分公式. 现在我们用分部积分公式来变换 (1.2.14). 由 (1.2.15) 可知

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w\cos(n,x)ds$$
$$-\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)\delta w d\Omega.$$

由于 $\delta w|_{\partial\Omega}=0$，因此

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}d\Omega=-\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)\delta w d\Omega. \tag{1.2.17}$$

类似地可以得到

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_y}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}dy=-\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\delta w d\Omega. \tag{1.2.18}$$

将 (1.2.17)，(1.2.18) 代入 (1.2.14) 就有

$$\delta J=\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\right\}\delta w d\Omega.$$

由于 δw 是满足 (1.2.12) 的任意函数，由变分法基本引理，知

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)=0. \qquad (1.2.19)$$

方程(1.2.19)叫做泛函(1.2.13)的 Euler 方程。这样，在条件(1.2.12)下求泛函(1.2.13)的极值问题就归结为求(1.2.19)满足(1.2.12)的解。

如果 $w|_{\partial\Omega}\neq 0$，同样推导出(1.2.14)，即

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\delta w+\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial w_y}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}\right)d\Omega=0.$$

由 Green 公式

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_x}\delta w\cos(n,x)ds-\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)\delta w d\Omega,$$

$$\iint_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_y}\frac{\partial(\delta w)}{\partial y}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial F}{\partial w_y}\delta w\cos(n,y)ds-\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\delta w d\Omega.$$

故(1.2.14)式变成

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)\right]\delta w d\Omega+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial w_y}\cos(n,y)\right)\delta w ds=0.$$

由于 δw 在边界和内部是独立的，故有

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)=0,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内},$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial w_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial w_y}\cos(n,y)\right|_{\partial\Omega}=0,\ \text{在边界上}.$$

$\left.\frac{\partial F}{\partial w_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial w_y}\cos(n,y)\right|_{\partial\Omega}=0$ 叫做自然边界条件.

设 $F=w_x^2+w_y^2+2\rho(x,y)w(x,y)$，代入自然边界条件为

$$2w_x\cos(n,x)+2w_y\cos(n,y)=0,$$

即

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

自然边界条件是有物理意义的，在房子里生火炉造成一个热分布，要想保持稳定的温度场，自然的边界条件是墙壁绝热．类似地我们要保持身体温和，必须多穿衣服，使自己和外界断绝热交换．

上述结果同时导出一个边界条件．一般说来，二阶常微分方程定解需要两个条件，但 Poisson 方程只要一个条件．数学家对此困惑不解，争论不休，变分法可以帮助解决这个问题，二阶椭圆型方程只需要一个边界条件．

若 $F=a_{11}w_x^2+2a_{12}w_{xy}^2+a_{22}w_y^2$，则相应 Euler 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_{11}w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(a_{22}w_y)=0.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$，F 是正定二次形，相应方程是椭圆型方程，而自然边界条件为

$$a_{11}w_x\cos(n,x)+a_{22}w_y\cos(n,y)=0.$$

显然当 F 是二次以上的泛函时，Euler 方程是非线性的．

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0$ 在力学上代表薄板平衡方程．著名数学家 Lagrange 把板看成交叉梁，认为板弯曲的方程为 $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0$，忽略了交叉梁的相互作用．1816 年女数学家 Sophie Germain (1776—1831) 纠正了 Lagrange 的错误，获得了巴黎科学院奖金．下面给出变分问题的一些具体例子．

例 1.2.2 求泛函

$$J(u)=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2\rho(x,y)w(x,y)\right]d\Omega \tag{1.2.20}$$

的 Euler 方程。

解 $$F(x,y,w,w_x,w_y)=w_x^2+w_y^2+2\rho w,$$

$$\frac{\partial F}{\partial w}=2\rho \quad \frac{\partial F}{\partial w_x}=2w_x \quad \frac{\partial F}{\partial w_y}=2w_y,$$

于是泛函 (1.2.20) 的 Euler 方程为

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\rho(x,y),$$

这就是 Poisson 方程。在条件 (1.2.12) 下求泛函 (1.2.20) 的极值问题就归结为求下述 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\rho(x,y), \text{ 在 } \Omega \text{ 内},\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{1.2.21}$$

泛函 (1.2.20) 可以解释成周边固定的薄膜的势能。这个例子的物理意义是：势能最小的位置就是薄膜的平衡位置。

例 1.2.3 求泛函

$$J(w)=\frac{D}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]d\Omega$$
$$-\iint_\Omega q(x,y)w\,d\Omega \tag{1.2.22}$$

的 Euler 方程

泛函 (1.2.22) 是下述泛函

$$J(w)=\iint_\Omega F(x,y,w,w_x,w_y,w_{xx},w_{yy},w_{xy})d\Omega \tag{1.2.23}$$

的特殊情形，仿照 (1.2.19) 的推导方法可以得到 (1.2.23) 的 Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}}\right)=0. \tag{1.2.24}$$

利用 (1.2.24) 可以得到 (1.2.22) 的 Euler 方程为

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,y) \tag{1.2.25}$$

(1.2.25) 可以解释成薄板弯曲时挠度所满足的方程叫作重调和方程，也可以写成

$$D\Delta^2 w = q(x,y).$$

泛函 (1.2.22) 可以解释成薄板弯曲时的势能. 这个式子的物理意义是: 势能最小的位置就是薄板的平衡位置.

在变分问题中除要求函数满足边界条件外，还经常要求满足其它约束条件. 上一节的例 2 (短程线问题)和例 3 (等周问题)都是有条件的变分问题，解决这类问题的方法仍是把泛函极值问题转化成求函数的极值问题，或者更精确地说，把求带有约束条件的泛函极值问题转化成普通函数的条件极值问题. 为此我们先温习一下数学分析中的条件极值问题，即在约束条件

$$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k < n$$

下求函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值. 我们采用 Lagrange 乘子法，引进 Lagrange 乘子 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 并令

$$F^* = F(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

把 F^* 看做 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 的函数求极值，显然极值点应满足

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, 2, \cdots n,$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \cdots k,$$

这里共有 $n+k$ 个未知数、$n+k$ 个方程，从这些方程中解出 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 就得到要求的极值点.

类似地我们考虑在约束条件

$$\Phi_k(x, y_1,y_2,\cdots, y_n) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, m \quad (1.2.26)$$

下求泛函

$$J(y_1,y_2,\cdots,y_n) = \int_a^b F(x,y_1,y_2,\cdots y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')dx \tag{1.2.27}$$

的极值，象前面一样，我们使用 Lagrange 乘子，现在我们要求的

解是函数而不是数。假设这些 Lagrange 乘子是

$$\lambda_1(x), \ \lambda_2(x), \cdots, \lambda_m(x),$$

并引进新的泛函

$$J^*(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \int_a^b [F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Phi_k(x, y_1, \cdots, y_n)] dx, \qquad (1.2.28)$$

这里把 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_m(x)$ 和 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 都看作未知函数。注意 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_n(x)$ 只能放在积分号里面，不能放在积分号外面，这是因为 J^* 必需是数，而不能是函数。我们可以仿照推导 (1.2.9) 的方法来求出泛函 (1.2.28) 的 Euler 方程。这个方法可以概括成如下的三个步骤

1. 设 $y_1^0(x), y_2^0(x), \cdots, y_n^0(x), \lambda_1^0(x), \lambda_2^0(x), \cdots, \lambda_n^0(x)$ 是问题的真解，令

$$y_i(x) = y_i^0(x) + \varepsilon\delta y_i(x), \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\lambda_i(x) = \lambda_i^0(x) + \varepsilon\delta\lambda_i(x), \quad i = 1, \cdots, m.$$

代入泛函 (1.2.28)，化求泛函极值问题为求普通函数的极值，得到使泛函取极值的必要条件。这个条件通常叫作泛函的一次变分为零。

2. 利用分部积分法变换得到的结果。

3. 利用变分法基本引理推出 Euler 方程。

由于未知函数多于一个，所以得到下述微分方程组

$$\begin{cases} F_{y_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(x) \Phi_{k y_i}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) - \dfrac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \\ \Phi_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \ k = 1, 2, \cdots, m, \end{cases}$$

这就是泛函 (1.2.28) 的 Euler 方程。

§ 1.3 Dirichlet 原理与 Fredholm 理论

上一节中指出，求泛函极值问题可以转化成求相应 Euler 方

程的定解问题。例如最速降线问题归结为求解常微分方程的边值问题，在条件（1.2.12）求泛函（1.2.20）的极值问题归结为求解 Poisson 方程的 Dirichlet 问题。但是一般说来，一个微分方程的通解未必能用初等函数表示出来。即使能用初等函数表示出来，也没有统一的方法求这些解，往往要依靠解题者的技巧。象最速降线问题那样找到解析解的情形是不多的，至于在条件

$$w(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$$

下求泛函 $J(w) = \iint\limits_{\Omega} (w_x^2 + w_y^2 + 2\rho(x, y)w(x, y))d\Omega$ 的极值，可以归结为求解

$$\begin{cases} \Delta u = \rho(x,y), \text{ 在}\Omega\text{内}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

这样的问题那就更困难了。一般说来，求解（1.3.1）比原来的变分问题更难。1851 年德国 Göttingen 大学的 Riemann 将这类问题反转，把 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ 在}\Omega\text{内}, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{1.3.2}$$

归结为求一个函数满足 $u|_{\partial\Omega} = f$ 且使泛函

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2)d\Omega \tag{1.3.3}$$

取极值。这个事实 Gauss 早就知道，英国人把它叫做 Thomson 原理，Riemann 则把它叫做 Dirichlet 原理。因为对实函数 u，$J(u)$ 不能是负的，因此 $J(u)$ 有非负下界 J_0。我们不难找到一系列 u_n，使 $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = J_0$，这样的 u_n 叫做极小化序列，设

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0,$$

则 u_0 就是这个变分问题的解，从而（1.3.2）的解存在。Riemann 将这个问题反转有重要意义，它不仅提供了证明偏微分方程解存在性问题的方法，而且提供了求（1.3.2）的近似解的可能性。从物理上看，如果 u_n 的势能趋于薄膜势能的最小值，那么 u_n 就趋于薄膜的平衡位置。事实上 Riemann 经常从物理观点出发考虑问

题，他的许多发现，包括 Dirichlet 原理和保角变换上的工作都是以物理背景为基础得到的。他相信在物理上有意义的东西也一定在数学上有意义。

Riemann 的证明是不严格的，Weierstrass 在他的 1870 年的一篇文章中对Dirichlet 原理作了批评，他指出尽管存在极小化序列 u_n 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}J(u_n)=J_0$，仍然未必存在函数 u_0 使 $J(u_0)=J_0$，这样 Dirichlet 原理的数学基础就动摇了。虽然物理学家们仍相信这个原理，但数学家们却把这个原理抛在一边，研究其它方法，积分方程方法就是其中之一。这时 Riemann 已经死去，其他数学家转向研究别的方法，所以 Neumann 哀叹道："如此优美并有广阔应用前景的 Dirichlet 原理已经从我们的视线里永远消失了。"在多次挽救失败之后，尽管物理学家还相信这个原理，数学家却把这个原理抛到一边，开始研究其它方法。

首先是 Weierstrass 的学生 Schwarz (1843—1921) 于 1870 年提出了 Schwarz 交替法，接着 Neumann 提出了积分方程法，然后 Poincaré (1854—1912) 于 1890 年提出了上下调和函数法。下面我们剖析积分方程法的主要思想。

考虑 Laplace 方程的含有任意函数的解。从物理背景出发，假设在物体表面 $\partial\Omega$ 上给定一层电荷，面密度为 $\mu(Q)$，则 $\partial\Omega$ 上面积 dS 上电荷在 P 点产生的电位为 $\dfrac{\mu(Q)dS}{\gamma_{PQ}}$ (图 1.3.1)，因而整个表面 $\partial\Omega$ 上的电荷在 P 点产生电位

$$u(P)=\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}}\,dS_Q.$$

由于静电场电位满足 Laplace 方程，因此对任意函数 $\mu(Q)$，由上式给出的 $u(P)$ 都满足 Laplace 方程，从而我们设想，如何选择 $\mu(Q)$ 满足给定的边界条件。对 Dirichlet 问题

$$u|\partial\Omega=f(P),$$

它归结为求解积分方程

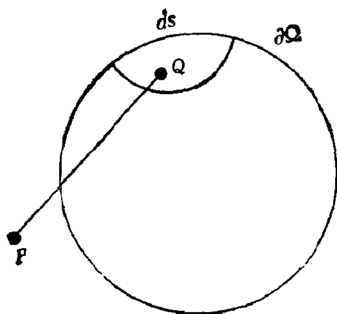


图 1.3.1

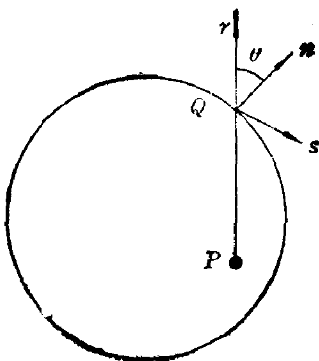


图 1.3.2

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}}\,dS_Q = f(P).$$

把 Neumann 问题归结为

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}}\,dS_Q = f(P).$$

注意(图 1.3.2)，有

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{\gamma_{PQ}} = \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\sin\theta,$$

其中 S 是与 γ 垂直的方向，θ 是外法线 n_P 与 γ_{PQ} 的夹角，由于 $\frac{\partial}{\partial S}\frac{1}{\gamma} = 0$，所以

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}}\,dS_Q = -\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)}{\gamma^2}\cos(PQ,n)dS_Q.$$

为考察这个积分，先设 $\mu = \mu_0$，则这个积分变为

$$\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}^2}\cos(n,PQ)dS_Q = \mu_0\iint_{\partial\Omega}\frac{\cos(PQ,n)}{\gamma_{PQ}^2}\,dS_Q$$

$= \mu_0 \times Q$ 跑遍 $\partial\Omega$ 时 γ_{PQ} 所张的立体角。

众所周知，按弧度计算平面角度

$$\theta = \frac{S}{\gamma} = \frac{\text{角度所对应的圆弧弧长}}{\text{圆弧半径}}.$$

图 1.3.3　　　　图 1.3.4

类似地

$$\text{立体角}=\frac{\text{角度所对应的球面面积}}{(\text{球的半径})^2}.$$

先对二维区域计算积分

$$\int\!\!\int_{\partial\Omega}\frac{\cos(PQ,n)}{\gamma_{PQ}}\,dS_Q,$$

对平面区域 Ω，当 P 位于 Ω 内时，Q_0 沿 $\partial\Omega$ 运动一周，γ_{PQ} 的张角为 2π（图 1.3.3）。当 P 位于 Ω 外时，Q_0 运动到 Q_1，γ_{PQ} 的张角最大。过了 Q_1，张角渐次减小，在 Q_2 处最小，张角为零。过了 Q_2，张角渐次增大，在 Q_3 处最大，以后渐次减小，在 Q_0 处复归于零。因此当 P 位于 Ω 外时，Q_0 绕 $\partial\Omega$ 一周，γ_{PQ_0} 的张角为零。当 P 位于 $\partial\Omega$ 上时，显然当 Q 点位于 $\partial\Omega$ 上时，若 $Q_1\to Q_0$，则直线 Q_1Q_0 的极限位置是在 Q_0 点 $\partial\Omega$ 的切线位置。因此当 Q_1 沿反时针方向绕 $\partial\Omega$ 一周，γ_{PQ} 的张角从零增加到 π。综合上述我们有

$$\int\!\!\int_{\partial\bar{\Omega}}\frac{\cos(n,PQ)}{\gamma_{PQ}}\,dS=\begin{cases}2\pi & \text{当 } P\in\bar{\Omega}-\partial\Omega,\\ \pi & \text{当 } P\in\partial\Omega,\\ 0 & \text{当 } P\in\bar{\Omega}.\end{cases}$$

类似地有

$$\mu_0 \iint_{\partial\Omega} \frac{\cos(n, PQ)}{\gamma_{PQ}^2} dS = \begin{cases} 4\pi\mu_0 \text{ 当 } P \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \\ 2\pi\mu_0 \text{ 当 } P \in \partial\Omega, \\ 0 \text{ 当 } P \text{ 在 } \Omega \text{ 外}. \end{cases}$$

从上面分析可知，当 P 从 Ω 内趋近 $\partial\Omega$ 时，积分

$$\mu_0 \iint_{\partial\Omega} \frac{\cos(n, PQ)}{\gamma_{PQ}^2} dS$$

不连续，边值不等于从内部趋近边界的极限值。

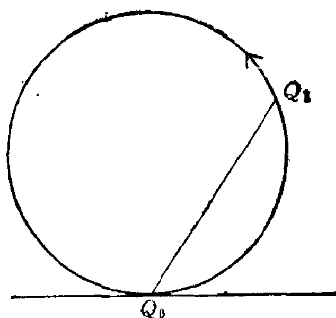


图 1.3.5

当 $\mu = \mu(Q)$ 时，内部趋近边界的极限值为

$$2\pi\mu(Q) + \iint_{\partial\Omega} \frac{\mu(Q)\cos(PQ, n)}{\gamma_{PQ}^2} dS,$$

因此条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f$ 归结为积分方程

$$2\pi\mu(Q) + \iint_{\partial\Omega} \frac{\mu(Q)\cos(PQ, n)}{\gamma_{PQ}^2} dS = f(Q).$$

这样用单层位势

$$\mu(P) = \iint_{\partial\Omega} \frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}} dS_Q$$

求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题时，它们可以分别化成积分方程

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\mu(Q)}{\gamma_{PQ}} dS_Q = f(Q), \quad P \in \partial\Omega, \tag{I}$$

$$2\pi\mu(P) + \iint_{\partial\Omega} \frac{\mu(Q)\cos(PQ, n)}{\gamma_{PQ}^2} dS = f(P), \quad P \in \partial\Omega. \tag{II}$$

(I) 叫作第一类积分方程，(II) 叫作第二类积分方程。初看起来，似乎第一个积分方程更容易解。其实不然，考虑积分方程

$$\int_a^b y(x) dx = 0,$$

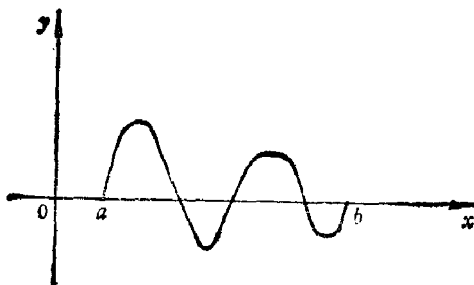


图 1.3.6

这个积分方程的解显然不唯一，形如图 1.3.6 的振荡函数，只要总面积为零，都是上述积分方程的解. 由于解可以剧烈地振荡，因此解是不稳定的. 相反地，方程

$$y(x)+\lambda\int_a^b y(x)dx=0 \quad \lambda \text{ 是常数}$$

却只有零解. 事实上，若 $y(x)$ 是上述方程的解，则 $y(x)$ 是常数，容易看出这个常数必定是零. 根据以上分析可知，至少在 19 世纪时，积分方程 II 比较简单，积分方程 I 比较复杂，用单层位势解 Dirichlet 问题当时是不成功的. 为了对 Dirichlet 问题也得到第二类积分方程，改用双层位势

$$\mu(P)=\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)\cos(PQ,n)}{\gamma_{PQ}^2}dS_Q.$$

双层位势的物理意义相当于在界面上分布了一层密度为 $\mu(Q)$ 的偶极子产生的位势. 这样 Dirichlet 问题和 Neumann 问题都归结为求解积分方程

$$2\pi\mu(P)+\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)\cos(PQ,n)}{\gamma_{PQ}^2}dS_Q=f(P).$$

历史上 Laplace, Poisson 和 Fourier 都考虑过特殊形式的积分方程，第一个自觉地直接应用并解出积分方程的人是 Abel, Liouville 独立于 Abel 也得到一些积分方程的解，Neumann 解出了凸域上的一类积分方程，积分方程这一术语属于 Du Bois Reymond. 1896 年 Vito Volterra (1860—1940) 观察到第一类

积分方程是含 n 个未知数的 n 个线性代数方程组当 n 趋近无穷时的极限形式。 Fredholm (1866—1927) 是 Stockholm 大学的数学教授，他在 1900 年吸收了上述看法，并把它用于解第二类积分方程。考虑积分方程

$$u(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi=f(x).$$

Fredholm 把 x 的区间用 $x_1=a+\delta,\ x_2=a+2\delta,\cdots,x_n=a+n\delta=b$，分成 n 等分，然后把上述方程的积分用和

$$u_n(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}K(x,x_j)u_n(x_j)\delta=f(x)$$

去代替，现在假设上述方程对 $[a,b]$ 的所有 x 值成立，因此它必须对 $x=x_1,\cdots,x_n$ 成立，这就给出 n 个方程的方程组

$$u_n(x_i)+\sum_{j=1}^{n}\lambda K(x_i,x_j)u_n(x_j)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这个方程组是由 n 个非齐次方程组成的，用以确定 n 个未知数 $u_n(x_1),u_n(x_2),\cdots,u_n(x_n)$。

线性方程组的理论是熟知的，然而用简洁的语言特别是用我们所需要的语言表达出来，仍然要下功夫。 首先回忆一元一次代数方程的理论。 当 $a\neq 0$ 时，$ax=b$ 对任意 b 有且仅有一解 $x=\frac{b}{a}$。 当 $a=0$ 时，$ax=b$ 有解当且仅当 $b=0$。 当 $b=0$ 时，此方程有无穷多个解。 将这个结果推广到方程组 $AX=B$，用 $|A|$ 表示矩阵 A 的行列式，则当 $|A|\neq 0$ 时，方程组 $AX=B$ 对任意 B 有且仅有一解。当 $|A|=0$ 时，方程组 $AX=B$ 未必有解，例如设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

则
$$\begin{aligned}(AX,Y)&=y_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+y_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2)\\&=x_1(a_{11}y_1+a_{21}y_2)+x_2(a_{12}y_1+a_{22}y_2)\\&=(X,A^*Y),\end{aligned}$$

这里 $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. 一般情况仍有

$$(AX,Y)=(X,A^*Y),$$

其中 A^* 是 A 的转置矩阵. 利用这个结果可知

$$(B,Y)=(AX,Y)=(X,A^*Y),$$

特别地，若 Y 满足 $A^*Y=0$，则 $(B,Y)=0$. 因此若 X 满足 $AX=B$，则对满足 $A^*Y=0$ 的任意解 Y，都有 $(B,Y)=0$. 可以证明这个条件也是有解的充分条件，即当 $|A|=0$ 时，$AX=B$ 有解当且仅当对任意满足 $A^*Y=0$ 的 Y，$(B,Y)=0$. 另外 A^* 与 A 有相同的秩，即 $AX=0$ 与 $A^*X=0$ 的解空间有相同的维数. 总结上述有

(1) 当 $|A|\neq 0$ 时，$AX=B$ 对任意 B 有且仅有一解；

(2) 当 $|A|=0$ 时，$AX=0$ 与 $A^*X=0$ 有非零解且解空间的维数相同；

(3) $|A|=0$ 时，$AX=B$ 有解当且仅当对 $A^*Y=0$ 的任意解 Y 都有 $(B,Y)=0$.

可以设想在一定条件下 $\delta\to 0$ 时，代数方程组的解就趋近于积分方程的解，这就需要定义无穷阶行列式，Fredholm 当年就是走的这一条路. 但无穷阶行列式十分复杂，用起来很不方便，下面不用行列式的术语来叙述线性方程组理论. 注意当 $|A|\neq 0$ 时，$AX=0$ 只有零解. 当 $|A|=0$ 时，$AX=0$ 有非零解，因此前面的结论可以改写成

(1) 若 $AX=0$ 只有零解，则对任意 B，$AX=B$ 有且仅有一解；

(2) 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=0$ 与 $A^*X=0$ 解空间的维数相同；

(3) $AX=B$ 有解当且仅当对 $A^*Y=0$ 的任意解 Y 都有 $(B,Y)=0$.

Fredholm 将这些结果推广到第二类积分方程

$$u(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)u(y)dy=f(x),$$

将这个方程简记为 $(I+\lambda K)u=f$，令 $K^*(x,y)=K(y,x)$，用 $(I+\lambda K^*)u=f$ 表示

$$u(x)+\lambda\int_a^b K^*(x,y)u(y)dy=f(x).$$

附加某些条件后，可以证明

(1) $(I+\lambda K)u=0$ 只有零解当且仅当对任意 f，

$$(I+\lambda K)u=f$$

有且仅有一解；

(2) $(I+\lambda K)u=0$ 与 $(I+\lambda K^*)u=0$ 的解空间是有限维的并且维数相同；

(3) $(I+\lambda K)u=f$ 有解当且仅当对满足 $(I+\lambda K^*)v=0$ 的任意解 v 都有 $(f,v)=0$。

上述结果叫作 Fredholm 理论，Fredholm 理论提供一套证明存在性的技巧．为证明 $(I+\lambda K)u=f$ 对任意 f 有解，只要证明 $(I+\lambda K)u=0$ 只有零解，这样就把存在性问题转化成唯一性问题，后一问题往往容易一些．当 $(I+\lambda K)u=0$ 有非零解时，设解空间的维数为 m，则 $(I+\lambda K^*)u=0$ 的解空间的维数也是 m。设解空间的基底为 $v_1(x),\cdots,v_m(x)$，则 $(I+\lambda K)u=f$ 有解的充分必要条件是 f 满足 $(f,v_i)=0$，$i=1,\cdots,m$.

前面已经讲过 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题可以化成

$$2\pi\mu(P)+\iint_{\partial\Omega}\frac{\mu(Q)\cos(PQ,n_Q)}{\gamma_{PQ}^2}dS_Q=f(P),$$

对这类方程 Fredholm 理论依旧成立，因此存在性问题便归结为唯一性问题，而后者较前者容易，以 Laplace 方程 Dirichlet 问题为例，只要证明

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

只有零解．$\Delta u=0$ 的解叫调和函数，由调和函数的性质知：若调

和函数不为常数，则只能在边界上取最大值和最小值. 这个结果也可以从物理观点猜出，设想物体内部有一个不依赖于时间的稳定的温度场，物体内部没有热源，则物体温度 $u(x,y,z)$ 满足方程 $\Delta u = 0$. 若 u 在物体内部取最大值，由于此点温度高于周围各点的温度，则此点的热量必向周围扩散，这点的温度必然降低，这与温度不依赖于时间矛盾. 类似地可以证明，u 不能在物体内部达到最小值. 既然 u 的最大值和最小值都在边界 $\partial\Omega$ 上，由于 $u|_{\partial\Omega} = 0$，从而 $u = 0$，这就证明了解的唯一性. 对 Laplace 方程 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

的解显然不唯一，任意常数都是

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的解. 由于转置方程与原方程一致，因此 Laplace 方程 Neumann 问题有解的充要条件是

$$\int_{\partial\Omega} Cf ds = 0,$$

其中 C 是任意常数. 这个条件也可以写成

$$\int_{\partial\Omega} f ds = 0.$$

这个等式的物理意义是流入流出物体的总热量为零. 而这个条件对保持物体内温度场稳定是必要的. Fredholm 理论将偏微分方程边值问题的研究归结为线代数方程组理论，而线代数方程组理论是我们最熟悉最优美的理论之一，这是一个振奋人心的喜讯. 就在这时，数学界又传来一个喜讯: Dirichlet 原理复活了.

在 Weierstrass 的工作差不多三十年后，Göttingen 大学的另一位数学家 Hilbert 试图挽救 Dirichlet 原理. 当时一位听过 Hilbert 报告的人回忆说，整个论文不到六页，在几分钟内就消除

了 Weierstrass 所批评的缺陷，使 Riemann 的理论恢复了原来的简明和优点。这种妙手回春的处理激起了满场的惊叹和赞美。"江山代有才人出，各领风骚几十年"，Hilbert 的工作开创了变分法发展的新阶段。

利用 Dirichlet 原理，可以把偏微分方程的边界值问题化为变分问题。变分问题虽然不容易找到精确解，但却有一些近似解法，而且不一定出之于数学家之手。以 § 1 提出的短程线问题为例，对一般曲面求出短程线的精确解是很困难的，但是许多从事板金工展开的工人却知道曲面上什么样的曲线是短程线。由于曲面可以近似地用分片平面代替，因此这样的短程线很容易构造出来，并且在工业生产甚至日常生活中被广泛地使用。在 Hilbert 恢复 Dirichlet 原理之后，各种变分问题的近似解法发展了起来。1908 年 Ritz 提出一种求解变分问题的近似方法，这种方法现在被命名为 Ritz 法。我们以在满足

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.3.4}$$

的条件下求泛函

$$J(u) = \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + 2uf)d\Omega \tag{1.3.5}$$

的极小值为例来解释 Ritz 法。

首先我们选择一组函数 $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \cdots, \varphi_n(x,y), \cdots$ 使它们满足如下的条件：

(1) 满足边界条件 $\varphi_k|_{\partial\Omega} = 0$, $k = 1, 2, \cdots$;

(2) 任何有限个这样的函数线性无关；

(3) 它们是完备的，即任意满足(1.3.4)的函数都能用它们有限线性组合来逼近。

满足这些条件的函数 $\{\varphi_k(x,y)\}$ 叫做坐标函数。令

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x,y), \tag{1.3.6}$$

其中 c_k 是待定常数。将 u_n 表达式代入泛函 (1.3.5) 则

$$J(u_n) = \iint_{\Omega} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2 + 2f\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right]d\Omega$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_\alpha c_\beta \left(\iint_\Omega \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y}\right) d\Omega\right)$$

$$+ 2\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \iint_\Omega f\varphi_\alpha d\Omega, \tag{1.3.7}$$

注意这时 $J(u)$实际是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的函数，记为 $F(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，令

$$a_{\alpha\beta} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial y}\right) d\Omega,$$

$$b_\alpha = \iint_\Omega f\varphi_\alpha d\Omega,$$

则 (1.3.7) 式可以写成

$$F(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}c_\alpha c_\beta + 2\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha c_\alpha. \tag{1.3.8}$$

将 (1.3.8) 对 c_i 求导数，并令 $\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 由于 $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$，所以

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}c_\beta + b_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n.$$

这是关于 c_β 的代数方程组，从这些方程中解出 c_β 并代入 (1.3.6) 中就得到我们要求的近似解. 下面我们举一个具体例子.

例 1.3.1 设 $\Omega = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$，求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.3.9}$$

从例 1.2.2 中可知求解 (1.3.9) 的问题可以归结为在条件 (1.3.4) 下求泛函 (1.3.5) 的极值. 取坐标函数 $\{\varphi_{nm}\}$ 为

$$\left\{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right\}.$$

由于 $$\int_0^a \cos\frac{m_1\pi x}{a}\cos\frac{m_2\pi x}{a}dx = 0, \quad (m_1 \neq m_2),$$

$$\int_0^b \sin\frac{n_1\pi y}{b}\sin\frac{n_2\pi y}{b}dy = 0,\ (n_1 \neq n_2),$$

$$\int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{a}{2},$$

$$\int_0^b \sin^2\frac{n\pi y}{b}dy = \frac{b}{2},$$

从而有

$$\int_0^a\int_0^b \cos\frac{m_1\pi x}{a}\cos\frac{m_2\pi x}{a}\sin\frac{n_1\pi y}{b}\sin\frac{n_2\pi y}{b}dxdy$$

$$= \begin{cases} \dfrac{ab}{4},\ m_1 = m_2,\ n_1 = n_2, \\ 0,\ 其它. \end{cases}$$

将 f 对 $\varphi_{\alpha\beta}$ 展开，设

$$f = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

并设

$$u_{\alpha\beta} = \sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

将 $u_{\alpha\beta}$ 和 f 代入泛函(1.3.5)，就有

$$J(u_{\alpha\beta}) = \iint_{\Omega}\left[\left(\sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta} c_{mn}\cdot\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta} c_{mn}\cdot\frac{n\pi}{b}\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)^2\right]d\Omega$$

$$+2\sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta} f_{mn}\iint_{\Omega}\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}c_{mn}d\Omega$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta} c_{mn}^2\frac{ab}{4}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)+2\sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta}\frac{ab}{4}f_{mn}c_{mn}.$$

从而

$$J(u_{\alpha\beta}) = \frac{\pi^2}{4}ab\sum_{m=1}^{\alpha}\sum_{n=1}^{\beta}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)c_{mn}^2+\frac{ab}{2}\sum_{m=1}^{\alpha}\sum_{n=1}^{\beta}f_{mn}c_{mn}.$$

对 c_{mn} 求导并令这个导数为零，则有

$$\frac{ab}{2}\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)c_{mn}=-\frac{ab}{2}f_{mn},$$

$$c_{mn}=-\frac{f_{mn}}{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)},$$

于是

$$u_{\alpha\beta}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\alpha,\beta}\frac{f_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

令 $\alpha\to\infty$, $\beta\to\infty$ 得到

$$u=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

这是问题 (1.3.9) 的解析解。

选取 $\varphi_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 作为坐标函数是理想的，这是因为 φ_{mn} 满足

$$\begin{cases}\Delta\varphi_{mn}=-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\varphi_{mn},\\ \varphi_{mn}|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

这里 $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$ 是二维 Laplace 算子，所以 φ_{mn} 是

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0,\ 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的解，$\lambda=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ 是矩形域上 Laplace 算子第一边界值问题的固有值，相应的 φ_{mn} 是固有函数。它们是正交完备的，也就是说

$$\iint_\Omega\varphi_{m_1n_1}\varphi_{m_2n_2}d\Omega=0,\ m_1\neq m_2 \text{ 或 } n_1\neq n_2,$$

并且任意函数都能展开成 φ_{mn} 的级数。Hilbert 和 Schmidt 证明更广泛的一类边值问题的固有函数也具有这个性质，因此选择

固有函数作为坐标函数是理想的．固有值和固有函数是十分重要的概念．如果只根据定义理解固有值，即固有值是使 $A\varphi=\lambda\varphi$ 有非零解的那些 λ 的值，那是十分不够的，不能理解固有值或特征值中"固有"和"特征"的含义，必需从数学中、物理中列举大量例子来理解它．对 $A\varphi=\lambda\varphi$ 来说，$\varphi=0$ 显然是解，如果只有零解，这个解是唯一的，没有选择的余地，这个结果是显然的、平凡的．如果对某个 λ，$A\varphi=\lambda\varphi$ 有非零解，这时解不唯一，有了选择的余地，这样的 λ 特别重要．好比走路，如果脚下只有一条路，没有选择余地，只有按这条路走．如果到了分叉路口，眼前的路不只一条，要决定何去何从，在这里选择哪条路就非常重要，因此分叉路口是关键点．记录一个人走过的路不必记录他走过的每一步，只要记录他所经过的交叉路口及其在交叉路口的选择就可以了．在这个意义上说，一个人走过的路由他所经过的交叉路口和在交叉路口的选择所决定的．如果把交叉路口比作固有值，把选择的路比作固有函数，也可以说一个算子由它的固有值决定．以 Laplace 算子 Δ 为例，设 Δ 的固有函数为 $\{\varphi_{mn}(x,y)\}$，由于任意函数 $u(x,y)$ 可以写成

$$u(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}\varphi_{mn}(x,y),$$

因此 $u(x,y)$ 由数列 $\{u_{mn}\}$ 所决定．由于

$$\Delta u=\sum_{m,n=1}^{\infty}u_{mn}\Delta\varphi_{mn}=\sum_{m,n=1}^{\infty}\lambda_{mn}u_{mn}\varphi_{mn}(x,y),$$

因此 Δu 由数列 $\{\lambda_{mn}u_{mn}\}$ 决定，由于 $\{u_{mn}\}$ 决定 u，所以 Δ 由数列 $\{\lambda_{mn}\}$ 决定．

我们自然希望取固有函数作为坐标函数，但是在一般情况下不能找到这些函数的简单表达式，所以要换别的函数．由于多项式能逼近任意函数，为了保证坐标函数的完备性，自然希望取多项式作为坐标函数，但是这样的函数未必能满足边界条件．为了使坐标函数满足边界条件，需要对多项式作一些改造．假设区域边界的曲线方程为 $F(x,y)=0$，显然多项式乘以 $F(x,y)$ 后必满

足边界条件.事实上,可以证明,$F(x,y), xF(x,y), yF(x,y), \cdots,$ $x^m y^n F(x,y), \cdots$ 是逼近于 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的任意函数,而且满足坐标函数的要求,可以作为坐标函数. 例如对于长方形 $\{0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$,其边界方程为

$$xy(x-a)(y-b)=0.$$

坐标函数可以取成 $\{xy(x-a)(y-b)x^m y^n\}$. 对椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

边界曲线是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$,坐标函数可以取成

$$\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)x^n y^n\right\}.$$

适当的修改泛函可以把坐标函数必需满足边界条件的要求去掉. 我们的问题是在满足边界条件 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的函数中求泛函

$$J(u)=\iint_\Omega (u_x^2+u_y^2+2uf)d\Omega$$

的极小值.这是一个有条件的极小值问题,我们可以引进 Lagrange 乘子使它成为一个无条件的泛函极值问题. 现在我们修改 $J(u)$,定义

$$J^*(u)=\iint_\Omega (u_x^2+u_y+2uf)d\Omega$$
$$+\int_{\partial\Omega} \lambda(x,y)u(x,y)ds. \qquad (1.3.10)$$

仿照上节方法,设 $u_0(x,y)$ 和 $\lambda_0(x,y)$ 使 (1.3.10) 取极小值,令 $u(x,y)=u_0+\varepsilon\delta u$, $\lambda=\lambda_0+\varepsilon\delta\lambda$ 并代入 (1.3.10),此时 $J^*(u)$ 变成 ε 的函数,记为 $\Pi(\varepsilon)$. 令 $\delta J^*(u)=0$,

$$\delta J^*=2\iint_\Omega (u_{0x}\delta u_x+u_{0y}\delta u_y+u_0 f\delta u)d\Omega+\int_{\partial\Omega}\lambda(x,y)\delta u ds$$
$$+\int_{\partial\Omega} u\delta\lambda ds.$$

利用分部积分公式可知

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x}d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\cos(n,x)ds-\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x^2}\delta u d\Omega,$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \cos(n, y) ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \delta u d\Omega,$$

用这些公式变换 $J^*(u)$，则有

$$\delta J^* = -2 \iint_{\Omega} (\Delta u_0 + f) \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left[2 \frac{\partial u_0}{\partial n} + \lambda(x, y) \right] \delta u ds$$
$$+ \int_{\partial\Omega} u_0 \delta \lambda ds. \tag{1.3.11}$$

令 $\delta J^* = 0$，利用变分法基本引理及 δu，$\delta\lambda$ 的任意性，可以证明 u_0 满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ -2 \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \lambda(x, y). \end{cases} \tag{1.3.12}$$

这说明使 J^* 取极小值的函数不仅在域内满足给定的方程，而且自动满足边界条件．因此我们取 J^* 作为泛函，可以不要求坐标函数满足边界条件．(1.3.12) 还表明变分问题的解同时给出

$$\lambda(x, y) = -2 \frac{\partial u_0}{\partial n},$$

对薄膜平衡问题而言，λ 的物理意义相当于转角．如果取 $\lambda = 0$ 显然 $J^* = J$，这样 (1.3.11) 右端第三项不再存在，这时可以推出

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.3.13}$$

因此我们不加任何条件求泛函 (1.3.5) 的极值，则得到的解自动满足 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0$．所以这个边界条件叫做自然边界条件，而 $u|_{\partial\Omega}=0$ 叫做本质边界条件．所谓自然边界条件就是事先不要求函数满足这个条件，变分的结果自动满足边界条件． 而本质条件则要求在满足这个条件的函数中求泛函的极值，因此用 Ritz 法求 Poisson 方程的 Neumann 问题的解既不要求坐标函数满足边界条件，又

不必修改泛函，因此特别方便。

从 $J(u)$ 出发求解是以最小势能原理为基础的。从 $J^*(u)$ 出发求解的基础则叫作广义变分原理。关于弹性理论最一般的广义变分原理由胡海昌和鹫津分别于 1954 年和 1955 年给出，钱伟长在 1964 年提出用 Lagrange 乘子法建立广义变分原理的泛函，在他的专著《变分法与有限元》一书中系统地阐述了这个问题。

应用 Ritz 法需要构造一个泛函，化偏微分方程边值问题为泛函的极值问题。1915 年俄国力学家 Galerkin 提出了一个方法，可以不用构造泛函直接求解边值问题。以 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

为例，设 $\varphi_k(x,y)$ 是满足 Ritz 法要求的坐标函数。即

(1) $\varphi_k(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$;

(2) $\varphi_k(x,y)$ 彼此线性无关；

(3) $\{\varphi_k(x,y)\}$ 是完备的；

令
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x,y),$$

其中 c_k 是待定常数，满足方程组

$$\iint_{\Omega} (\Delta u_n - f)\varphi_k d\Omega = 0, \ k = 1, 2, \cdots, n,$$

或者
$$\sum_{m=1}^{n} c_m \iint_{\Omega} \varphi_k \Delta\varphi_m d\Omega = \iint_{\Omega} f\varphi_k \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.3.14}$$

(1.3.14) 是关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的代数方程组，从 (1.3.14) 中解出 c_k 就得到近似解 u_n。这就是著名的 Galerkin 方法。可以证明在能构造泛函使边界值问题化为变分问题的情形下，用 Ritz 法求出的近似解和用 Galerkin 法求出的近似解是一样的，但对不能化成变分问题的情形 Ritz 法不能用了。而 Galerkin 方法仍能用，因此 Galerkin 方法的应用比 Ritz 法要广。

Ritz 法和 Galerkin 方法产生后，由于计算量小，数值结果好，因此得到广泛的应用，但是也出现了一些问题。这使人们产生一些疑问：

(1) Ritz 法求出的近似解是否收敛？哪些量能算准？哪些量算不准？

(2) 如何估计近似解的误差？

显然，这些问题对实际工作者是很重要的。我们将在下一章回答这些问题。

1926 年 Treftz 提出一种解偏微分方程边值问题的方法，现以 Laplace 方程的 Dirichlet 问题为例来解释这个方法。设给定的边值问题为

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u|_{\partial\Omega} = f.\end{cases} \tag{1.3.15}$$

它的真解为 u，假设 $\{\varphi_n\}$ 是 Laplace 方程的一组线性无关解，并且是 Ω 上的完备系，也就是说它们的线性组合能逼近 Ω 上的任何函数。令 $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$，选择待定常数 c_k 使

$$J(u_n - u) = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega \tag{1.3.16}$$

取最小值，这种方法的物理意义是使近似解的势能 $J(u_n)$ 逼近真解的势能 $J(u)$，基本思想仍认为只要 $J(u_n) \to J(u)$，u_n 就会趋近 u。将 u_n 的表达式代入 (1.3.16)，这时 $J(u - u_n)$ 变成

$$J(u - u_n) = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega.$$

选 c_k 使 $\frac{\partial J(u - u_n)}{\partial c_k} = 0$，则有

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{m=1}^n c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{m=1}^n c_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right] d\Omega = 0. \quad (1.3.17)$$

整理 (1.3.17) 式得

$$\sum_{m=1}^n c_m \iint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) d\Omega. \quad (1.3.18)$$

(1.3.18) 是关于 c_k 的代数方程组，但右端含有未知函数 u 而无法求解，必须将 (1.3.18) 加以变换，根据 Green 公式

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds - \iint_\Omega u \Delta\varphi_k d\Omega,$$

u 是 (1.3.15) 的解，从而有 $u|_{\partial\Omega} = f$. 再根据假设 $\Delta\varphi_k = 0$，所以

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds.$$

将此式代入 (1.3.18)，得到

$$\sum_{m=1}^n c_m \iint_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds, \ k = 1, \cdots, n, \quad (1.3.19)$$

求出 c_k 之后，u_n 也就确定了.

求解偏微分方程的边值问题有两类方法．一类是选择一些满足边界条件的函数，作它们的组合，使其近似满足方程．Ritz 法就是这类方法，它是通过使泛函取极值满足方程的．另一类方法选一些满足方程的函数，作它们的线性组合，使其近似地满足边界条件．Treftz 方法实际上属于这一类．即u_n 首先满足方程，逼近

界条件是通过极小化 $J(u-u_n)$ 实现的。若 u_n 及其前二阶导数收敛，满足方程已无问题，只要 $u_n|_{\partial\Omega}\to f$ 就可以了，所以使 $J(u-u_n)$ 最小相当于使 u_n 在边界上按某种意义逼近 f。

Treftz 方法有一个有趣的性质，由 (1.3.17) 及 $u_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k$ 可知 $\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)\frac{\partial u_n}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\frac{\partial u_n}{\partial y}\right]d\Omega=0$，利用这个公式计算 $J(u-u_n)$ 可得

$$
\begin{aligned}
J(u-u_n)&=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega\\
&=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_n}{\partial y}\right]d\Omega\\
&=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega,
\end{aligned}
\tag{1.3.20}
$$

由于 $J(u-u_n)\geqslant 0$ 故由 (1.3.20) 知

$$J(u)\geqslant J(u_n).\tag{1.3.21}$$

从物理观点看，Ritz 法以最小势能原理为基础，所以近似解的势能大于真解势能，因此 $J(u_n)$ 给出了 $J(u)$ 的上界。Treftz 以最小余能原理为基础，所以 $J(u_n)$ 是 $J(u)$ 的下界。这种给出上下界的方法很重要，Ritz 法和 Treftz 方法并用就可以同时给 $J(u)$ 的上界和下界，定出误差范围。

最小势能原理说明在连续介质中平衡位置势能最小。余能原理表示在平衡问题中，连续介质使势能最大，介质不连续使势能减小。

从物理观点看，Ritz 法是以最小势能原理为基础的，$J(u_n)$ 相当于势能，对按 Ritz 法求出的 u_n，$J(u_n)$ 单调下降，并且 $J(u_n)$ 是非负的。因此 $J(u_n)$ 应该有极限，从而 u_n 也有极限，即

存在这样的 $\{u_n\}$ 为极小化序列. 若函数 u_0 是 u_n 的极限函数, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = u_0$, 则 u_0 就是问题的解, 这样 Ritz 法的收敛性似乎不成问题.然而事实上并不完全如此,问题恰恰在于极小化序列不一定收敛于一个极限函数. 极小曲面问题给出一个简单例子, 所谓最小曲面问题, 就是在以给定闭曲线为边界的曲面中找出一个曲面,使其面积最小. 这个问题的数学提法如下: 设给定空间曲线C在 xy 平面上的投影曲线所围的区域为 Ω, 我们在通过C的所有具有分段连续微商的曲面中求曲面 $z = z(x,y)$, 使

$$\iint_{\Omega}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

最小. 这里分段连续可微的假设是可行的, 因为在每片连续可微的范围内都可求面积, 整个曲面的面积是所有这些分片曲面的面积之和. 若取C为平面曲线,例如,取C为单位圆, 则函数 $z = 0$ 给出了极小,也就是说 xy 平面本身给出了极小. 凡通过上述圆周而面积收敛于 1 的任何一串曲面都是一个极小化序列. 现在我们可以造出一些曲面,它们分段连续可微,通过圆周, 面积任意接近 1, 可是在有些点,表示它们的函数 $z(x,y)$ 并不收敛于 0, 甚至为任意大. 例如, 考虑一个高为 1 底半径为 ε 而垂直放在 $z = 0$ 上的圆锥,取这个锥面及上述圆在锥底之外部分所做成的曲面,这个曲面的方程为

$$z=\begin{cases}1-\dfrac{r}{\varepsilon}, & r\leqslant\varepsilon,\\ 0, & \varepsilon\leqslant r\leqslant 1,\end{cases}$$

其中 r 表示点到圆心的距离. 这个曲面的面积为

$$1-\pi\varepsilon^2+\pi\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2},$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时,面积趋于 1, 它们通过单位圆, 因此构成一个极小化序列. 但这些曲面做成的极小化序列并不收敛于 $z = 0$, 特别是在锥的顶点 $r = 0$ 处不收敛于零. 容易看出若在圆内另一点放上类似的圆锥,便可造出一个极小化序列在两个点上不收敛于 0. 类似可以构造出在有限个点上不收敛于 0, 甚至发散的极小化序列,

例如,取锥高为 ρ, 母线 $l=\sqrt{\rho^2+\varepsilon^2}$, 锥面积 $S=\pi\varepsilon\sqrt{\rho^2+\varepsilon^2}$, 取 $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $S=\pi\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^4}\to 0$. 即极小化序列可以在有限个点上发散,甚至可以在圆内一个稠密集上发散. 一点不收敛,你可以忽略,认为是局部现象. 有限点发散就不能忽略. 而在稠密集合上发散,看起来几乎黑压压一片,使人惊诧,使人不得不重视.

另一个例子是 Laplace 方程的 Dirichlet 问题. 选取在 Ω 内连续分片一次的可微函数 u (满足 $u|_{\partial\Omega}=0$), 使

$$J(u)=\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)dxdy$$

最小,这个问题的解显然是 $u\equiv 0$. 设在区域 Ω 内取一个圆心在原点,半径为 $a(a<1)$ 的圆.

令

$$\varphi_a(x,y)=\begin{cases}0, & \text{在 }\Omega\text{ 内和圆 } r=a \text{ 之外},\\ \dfrac{A\ln\dfrac{r}{a}}{\ln a}, & a^2\leqslant r\leqslant a,\\ A, & 0\leqslant r\leqslant a^2.\end{cases}$$

显然 $\varphi_a(x,y)$ 连续且分片光滑,改用极坐标

$$J(\varphi_a)=\iint_{\Omega}\left(\varphi_{ar}^2+\frac{1}{r^2}\varphi_{a\theta}^2\right)rdrd\theta,$$

事实上

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial\varphi_a}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial s}=\frac{\partial\varphi_a}{\partial x}(-\sin\theta)+\frac{\partial\varphi_a}{\partial y}\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\theta}\right)^2&=\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial s}\right)^2\\ &=(\varphi_{ax}\cos\theta+\varphi_{ay}\sin\theta)^2+(-\varphi_{ax}\sin\theta+\varphi_{ay}\cos\theta)^2\\ &=\varphi_{ax}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\varphi_{ay}^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta),\\ &=\varphi_{ax}^2+\varphi_{ay}^2,\end{aligned}$$

这个意义是梯度不变.

由于

$$\varphi_{ar} = \frac{A}{\ln a} \cdot \frac{1}{r}, \quad a^2 \leqslant r \leqslant a, \quad \varphi_{a\theta} = 0,$$

故

$$J(\varphi_a) = \int_0^{2\pi} \int_{a^2}^{a} \left(\frac{A}{\ln a}\right)^2 \frac{1}{r^2} \cdot r dr d\vartheta,$$

$$= 2\pi \left(\frac{A}{\ln a}\right)^2 \int_{a^2}^{a} \frac{1}{r} dr = -2\pi \frac{A^2}{\ln a},$$

当 $a \to 0$ 时，$\lim\limits_{a \to 0} J(\varphi_a) = 0$，$\varphi_a$ 构成极小化序列，但从

$$\lim_{a \to 0} \varphi_a(x,y) = \begin{cases} 0, & r \neq 0, \\ A, & r = 0 \end{cases}$$

并不能得出 $u = 0$。

虽然由极小化序列不能导致 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u_0$，但用 Ritz 法求解一些边值问题却十分成功。如何解释这个问题呢？Göttingen 大学的另一名数学家 Friedrichs 对这个问题作了深入的研究，尽管在极小曲面的例子中可以在一个稠密集合上发散，但是其测度为零，只是表面上点很多而已。他发现，虽然按 Ritz 法求出的近似解 u_n 不一定逐点收敛到 u_0，但是如果将收敛的定义改为均方收敛，那么，u_n 仍然收敛于 u_0，也就是说

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega} (u_n - u)^2 d\Omega = 0.$$

为了得到这个结果，我们考察按均方收敛与一致收敛的关系，也就是势能收敛与解收敛之间的关系。我们从简单问题入手，先考虑一维的情形。假设 $u_n(0) = u(0) = 0$，则

$$u_n(x) - u_0(x) = \int_0^x (u_n - u_0)' dx, \tag{1.3.22}$$

将上式两端平方并利用 Schwarz 不等式可得

$$(u_n(x) - u_0(x)) = \left(\int_0^x (u_n - u_0)' dx\right)^2$$

$$\leqslant \int_0^x 1^2 dx \int_0^x (u_n' - u_0')^2 dx = x \int_0^x (u_n' - u_0')^2 dx, \quad (1.3.23)$$

假设 $0 \leqslant x \leqslant a$，则有

$$u_n(x) - u_0(x) \leqslant a \int_0^a (u_n' - u_0')^2 dx. \qquad (1.3.24)$$

这说明在一维情形如果 $u_n(0) = u_0(0)$，那么从导数的均方收敛能推出函数的逐点收敛．事实上从 (1.3.22) 可以看出，若

$$\int_0^a (u_n' - u_0')^2 dx \to 0,$$

则 $u_n(x)$ 不仅逐点收敛于 u_0，而且一致地收敛于 u_0．也就是说在 $u_n(0) = u(0) = 0$ 的条件下，导数的均方收敛能推出函数的一致收敛．从而在一维的情况下，我们可以设想按 Ritz 法求出的近似解一致收敛于真解．这里 $u_n(0) = u(0) = 0$ 的条件不能去掉，如果没有这个条件，结论显然是不对的．前面的例子告诉我们在二维情况下并不如此．那么在二维情况下，导数的均方收敛和函数的均方收敛之间有什么关系呢？Friedrichs 于 1928 年证明，对满足 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 的函数，存在与 u 无关的常数 C，使

$$\iint_\Omega u^2 d\Omega \leqslant C \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) d\Omega.$$

从而由按能量收敛导出函数的均方收敛．这个不等式叫 Friedrichs 不等式，Friedrichs 以这个不等式为基础证明了 Poisson 方程的 Dirichlet 问题，按 Ritz 法求出的近似解均方收敛于真解．事实上，能量收敛就是一阶导数的均方收敛，因此不仅 u_n 均方收敛于 u_0，而且 u_n 的一阶导数也均方收敛于 u_0 的一阶导数．所以这种收敛是函数本身连同一阶导数的均方收敛，在一维情形是函数本身的一致收敛和导数的均方收敛，这表明收敛情况与维数有关．

我们知道，对有界域而言，若 u_n 一致收敛于 u，则 u_n 必然均方收敛于 u．反过来则不成立．同时均方收敛对我们比较陌生，物理意义也不清楚，而且均方收敛似乎很粗糙，所以我们比较喜欢一致收敛．下面我们来探索均方收敛的物理意义．首先我们

来证明下面的结果：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega}(u_n-u)^2d\Omega=0$，则对 Ω 的任何子域 Ω_1 及任意平方可积函数 φ，都有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_1}u_n\varphi d\Omega=\iint\limits_{\Omega_1}u\varphi d\Omega. \tag{1.3.25}$$

证明 由 Schwarz 不等式可知

$$\left|\iint\limits_{\Omega_1}\varphi u_n d\Omega-\iint\limits_{\Omega_1}\varphi u d\Omega\right|\leqslant\iint\limits_{\Omega_1}|\varphi||u_n-u|d\Omega$$

$$\leqslant\left[\iint\limits_{\Omega_1}\varphi^2 d\Omega\right]^{1/2}\left[\iint\limits_{\Omega_1}|u_n-u|^2 d\Omega\right]^{1/2}.$$

由于 $\iint\limits_{\Omega}\varphi^2 d\Omega$ 是个有限的常数，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_1}(u_n-u)^2d\Omega=0$，所以 $\left|\iint\limits_{\Omega_1}\varphi u_n d\Omega-\iint\limits_{\Omega_1}\varphi u d\Omega\right|\to 0$，亦即 (1.3.25) 式成立.

如果取 φ 在 Ω_1 内为 1，在 Ω_1 外为 0，φ 当然是平方可积函数，根据 (1.3.25) 式就有

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_1}u_n d\Omega=\iint\limits_{\Omega_1}u d\Omega, \tag{1.3.26}$$

从而在 Ω_1 上 u_n 平均收敛于 u. 注意 Ω_1 是 Ω 的任意子域，我们不妨把 Ω_1 取的任意小，而 (1.3.26) 断定对任意小的区域 Ω_1，u_n 都平均收敛于 u，或者说 u_n 局部平均收敛于 u. 我们证明的命题可以叙述成：若 u_n 在 Ω 上均方收敛于 u，则在 Ω 的任意子域 Ω_1 上 u_n 局部平均收敛于 u. 应该指出，由于点没有大小，所以不能测出物理量在一点的值. 而任何仪器所测得的物理量在一"点"上的值，实际都是在一个区域上的平均值因此局部平均收敛或均方收敛在实用上已经够了.

Friedrichs 明确要证明的是函数连同导数的均方收敛，为引进 Sobolev 空间打下了基础. 为了证明 Poisson 方程的 Dirichlet 问题 Ritz 法的收敛性，需要用 Friedrichs 不等式，对 Neumann

问题需要 Poincaré 不等式，对第三边值问题需用另一种形式的 Friedrichs 不等式，每一个不等式的证明都不一样．我们要研究 Ritz 法的收敛性，但是我们不想一个问题一个问题的证明，而是想在更高的观点上统一地解决这个问题．为此我们要研究 Hilbert 空间理论．

第二章 Hilbert 空间

上一章的研究路线可以归纳如下.

偏微分方程边值问题化为在满足边界条件的函数类中求某一泛函 $J(u)$的极值. 证明解的存在性化为构造坐标数列 $\{\varphi_k\}$，满足边界条件，且是完备的. 令 $u_n=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi(x,y)$，选择 $c_1\cdots c_n$ 使 $J(u_k)$ 取极值化为证明近似解法的收敛性.

在第一章中是先给定泛函，使泛函取极值，导出它的 Euler 方程. Riemann 将问题反转，化微分方程边值问题为求泛函的极值，这时先有泛函，后有方程. 但若先给定方程，则求一个泛函使它的 Euler 方程恰为给定的方程显然是一个新问题. 如果说给定泛函求它的 Euler 方程和取极值的必要条件相当于对泛函求“微分”，那么给定一个方程求一个泛函使它的 Euler 方程恰为给定的方程就相当于求“不定积分”. 这是一个更困难的问题，如何用统一方法证明相应的泛函极值问题解的存在性也是一个棘手的问题. 至于构造坐标函数，对于一般的区域和边界条件要构造一系列满足边界条件的函数已非易事，证明它们的完备性那就更加困难. 证明近似解的收敛性也是相当困难的问题. 上一章已经指出，收敛性的概念需要扩展，困难的问题使数学家们寻找新的出路，寻找新的工具. 有趣的是正如同当年求瞬时速度、曲线的切线、函数的极值等不同问题都归结为微积分一样，上述这些问题的解决都归结为 Hilbert 空间理论. 不同的道路都通向一个归宿，Hilbert 空间理论不是突然产生的. 这里我们简单地追述一下 Hilbert 空间的历史.

§2.1 引　　言

几何学有着光荣的历史，从尼罗河流域的土地测量和古埃及的纸草卷开始，在世界的几百种文明中，许多民族都有自己粗陋的几何，然而只有希腊人把它提高到理论的高度．在 Ptolemy 王朝时期，亚历山大城的 Euclid 以几条公理为基础，使得全部几何学都能按指定的推理规则从这几条公理演绎出来．这座壮丽的科学大厦外表那么富丽堂皇，内容那么深刻，丰富，推理那么严谨，结构却十分简单．几何学开阔了科学家和哲学家的眼界．Euclid 几何不仅成为训练每个科学工作者逻辑思维能力的工具，而且成为建立新科学的样板．许多哲学家和科学家认为世界万物尽管形形色色、错综复杂，然而它们的结构应该是简单的，宇宙应该是简单的、和谐的，受少数基本规律的支配．这些基本规律可以用数学形式表示，而其它规律可以由这些基本规律演绎出来．这一点鼓舞着科学家们去探索物质世界的奥秘，寻求其数学规律．几何学则成为他们的样板和工具．几千年来，从 Plato 到 Kepler，从 Newton 到 Einstein，许多学者都受过这种思想的影响．

Fermat 和 Descartes 创立解析几何学，把代数和几何联系起来，为几何学提供了新的强有力的工具，不仅大大地扩展了几何研究的范围，而且解决了许多初等几何本身不能解决的问题．Newon，Leibniz 完成了微积分，Gauss 用分析工具研究了曲面上的几何．Riemann 把它推广到高维流形，Galois 创立 Galois 理论，彻底地解决了代数方程的根式求解问题及初等几何尺规作图问题．他们都用新的工具研究几何，解决了初等几何不能解决的问题．Euler 和 Bernoulli 兄弟的工作，Lagrange 的“分析力学”，Laplace 的“天体力学”都用分析方法取得了辉煌的成就．尽管 Monge 及其学生企图复兴几何，然而在 19 世纪，几何学的光辉的地位被分析取代，分析方法取得了伟大的胜利．通常人们把中学里学的几何和代数看作初等数学，把微积分、微分方程等看成高等

数学．高等数学高于初等数学． 但是正如 Monge 指出的那样，分析学家对结果作几何解释，可以直观地指导自己的工作．在研究函数序列 $\{\varphi_k\}$ 的完备性时，Hilbert 指出，正如同 n 维 Euclid 空间中的一个点由它的 n 个坐标给定一样，一个函数由它的 Fourier 系数 f_i 给出，这些系数满足 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < +\infty$。他还引进了实数序列 $\{x_i\}$ 使得 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$。Schmidt 和 Frechet 把序列 $\{x_n\}$ 看成一个点，函数被表示成无穷维空间的点．Riesz 和 Fisher 证明，在 Lebesgue 平方可积函数与它们的 Fourier 系数所成的平方可和序列之间，存在一个一一对应关系．平方可和序列可以看成无穷维空间中的坐标． 无穷维空间是 Euclid 空间的推广，许多分析的结果都可以在无穷维空间中得到解释． 下面我们用几何类比的方法将分析结果赋以几何意义：

	向量 $(f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(n)})$	函数 $f(x)$
长度：	$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)^2}$	$\|f\| = \iint_{\Omega} f^2(P)d\Omega$
距离：	$\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \sqrt{\sum_{1}^{n}(f_1^{(i)} - f_2^{(i)})^2}$	$\rho(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \left(\iint_{\Omega} \|f_1 - f_2\|^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$
收敛：	$f_n - f \to 0 \Longleftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$	$f_n - f \to 0 \Longleftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$
内积：	$(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}$	$(f_1, f_2) = \iint_{\Omega} f_1(P) f_2(P) d\Omega$
正交：	$(f_1, f_2) = 0$	$(f_1, f_2) = \iint_{\Omega} f_1(P) f_2(P) d\Omega = 0$

单位正交系：$\{e_k\}$

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

标准正交系：$\{\varphi_k\}$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\forall f\in E^n, f=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$	$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
f_i 是 f 的坐标，f 在 e_i 上的投影 $f_i=(f,e_i)$	f_k 是 f 的 Fourier 系数，$f_k=(f,e_k)$

通过这种类比给函数定义长度、距离和内积，并把这样得到的带有长度和内积的在Ω上平方可积的函数的集合叫做 L^2 空间，记以 $L^2(\Omega)$. 有了距离就可以定义极限，有了内积可以定义角度. 由 Euclid 几何可知，若θ是向量 f_1 和 f_2 之间的夹角，则 $(f_1,f_2)=\|f_1\|\|f_2\|\cos\theta$，即两个向量的内积等于两个向量长度的乘积再乘以它们之间夹角的余弦，从而 $\cos\theta=\dfrac{(f_1,f_2)}{\|f_1\|\|f_2\|}$，因此有了长度和内积可以定义角度，特别是可以定义函数间的角度. 若两个向量正交，则 $\theta=90°$，从而 $(f_1,f_2)=0$. 反过来若 f_1 和 f_2 不是零向量，由 $(f_1,f_2)=0$ 可以推出 $\cos\theta=0$，f_1 与 f_2 正交. 因此可以用 $(f_1,f_2)=0$ 来定义 f_1 与 f_2 正交. 对函数来说，f_1 和 f_2 正交就是 $\int_\Omega f_1(P)f_2(P)d\Omega=0$. 若 $\{\varphi_i(P)\}$ 是Ω上的单位正交系，则必须有 $\iint\limits_\Omega \varphi_i^2(P)d\Omega=1$, $\iint\limits_\Omega \varphi_i(P)\varphi_j(P)d\Omega=0$, $i\neq j$. 对 n 维 Euclid 空间 E^n，若 $e_1\cdots e_n$ 是 E^n 的单位正交系，则 E^n 中的任意向量 f 可以写成 $f=f_1e_1+f_2e_2+\cdots+f_ne_n$，其中 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 f 的各个分量. 将上式两端与 e_k 作内积，由于 $(e_i,e_i)=1$，$(e_i,e_j)=0\ (i\neq j)$，因此 $f_k=(f,e_k)$，即 f 的第 k 个分量等于 f 与 e_k 的内积. 注意

$$(f,e_k)=\|f\|\|e_k\|\cos\theta,$$

θ是 f 和 e_k 的夹角，$\|e_k\|=1$，因此 $\|f_k\|$ 相当于f在 e_k 上的投影. 对函数而言，可以把标准正交系当坐标系，而任意函数可以用坐标系表示出来. 例如取 $\Omega=[0,l]$，$\varphi_k(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{k\pi}{l}x$，容易验证，$\int_0^l \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$，因此 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[0,l]$

上的单位正交系。根据 Fourier 级数的展开定理，任意满足 $f(0)=f(l)=0$ 的连续可微函数都可以对 $\{\varphi_k(x)\}$ 展开成

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\varphi_k(x),$$

其中 $f_k=(f,\varphi_k)=\int_0^l f(x)\varphi_k(x)dx$ 叫做 $f(x)$ 的第 k 个 Fourier 系数。如果把 $\varphi_k(x)$ 看成坐标向量，则 f_k 可以看作 f 的坐标或者 f 在 φ_k 上的投影，注意在 Euclid 空间中坐标向量的个数等于空间的维数。而现在 $\{\varphi_k(x)\}$ 有无穷多个，因此是无穷维空间。Fourier 级数仅仅是标准正交系 $\{\varphi_k(x)\}$ 的特殊例子。$\{\varphi_k(x)\}$ 还可以取成 Bessel 函数，Legendre 函数以及其它函数，对它们都有 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x)$，因此右端叫做 $f(x)$ 的广义 Fourier 级数。按 Fourier 级数展开，按 Bessel 函数展开，按 Legendre 函数展开在分析上是不同的。现在给出统一的几何解释。从 $L^2(\Omega)$ 观点来看，它们只不过是按不同坐标系的表示。用几何类比可以为解决高等数学问题提供直观背景和新的途径，还可以猜出一些定理。例如在 n 维 Euclid 空间中对任意向量 f 都有

$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{n} f_i^2$，其中 $\|f\|$ 是向量 f 的长度，f_i 是 f 的第 i 个分量，以上实际上是勾股弦定理。将其推广到无限维空间 $L^2(\Omega)$ 中就有 $\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$，这里 $\|f\|^2=\iint\limits_{\Omega} f^2 d\Omega$，$f_i=\int_\Omega f(P)\varphi_i(P)d\Omega$，$\varphi_i(P)$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的单位正交系，这就是 Fourier 级数理论中的 Parseval 恒等式。

从 Euclid 几何我们知道，平面外一点到平面的最短途径是过这点到平面的垂线。假设此平面用 π 表示，f 是 π 外一点，e_1，e_2 是 π 上彼此正交的单位向量，则平面上的任一向量可以写成

$$X=x_1e_1+x_2e_2.$$

设平面 π 上与 f 距离最近的点为 f_0，则 $ff_0\perp\pi$。设 $f=f_1e_1+$

$+f_2e_2+f_3e_3$ $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是三维 Euclid 空间的标准正交系，

$$f_0=x_1e_1+x_2e_2,$$

则有 $(f-f_0,e_i)=0$，$i=1$，2 或者 $x_i=(f,e_i)=f_i$. 类似地；如果 $\{\varphi_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交系，那么 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合构成 $L^2(\Omega)$ 中的一个有限维子空间，记这个空间为 π_m. 假设 f 不是 π 中的函数，在 π 中求距 f 最近的点就相当于选择常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使

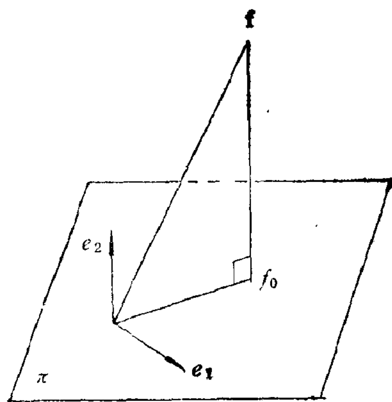


图 2.1.1

得 $\iint_\Omega\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right)^2d\Omega$ 最小，$c_k=f_k$，$k=1,2,\cdots,n$，亦即 c_k 恰是 f 的 Fourier 系数. 用高等数学的术语来说就是：一个函数的 Fourier 级数的前 n 项之和是对这个函数在最小二乘方意义下的最佳逼近. 上述问题可以看成是求 $u\in\pi_m$，使

$$J(u)=\iint_\Omega(f-u)^2d\Omega$$

取极小值. 类似地，Ritz 法是求 $u\in\pi_m$ 使泛函

$$J(u)=\iint_\Omega(u_x^2+u_y^2+2fu)d\Omega$$

取极小值. 如果能将 $J(u)$ 解释成 f 到 π_m 的距离，那么最小势能原理可以解释成，在子空间 π_m 内求一点与 π_m 外的点 f 距离最短. 一旦变分原理有了几何解释，许多数学物理问题可以按几何思想处理. 几何方法是我们熟悉的，这就为我们提供了一个新的锐利工具，也就是解决问题的 Hilbert 空间方法.

§ 2.2 线性赋范空间

在科学研究中，常常设想一些新的概念，以求达到对事物统一的理解. 现在我们要虚拟一种几何，将分析和几何统一起来(当然只是部分的统一)，为了建立这种虚拟的几何，我们就要从有限维空间进入到无限维空间.

我们要建立的统一是在一种"虚拟"的空间中的统一，这种"虚拟"的空间不是凭空产生的，而是我们经过研究三维空间的基本性质，然后再研究具有类似性质的对象. 把这些性质抽出来，抛开具体的对象，赋予抽象的形式.

先考虑向量的加法以及向量与数的乘法，研究它们有哪些性质. 设 x, y, z 是向量，α 和 β 是数，显然它们具有以下一些性质:

$x + y = y + x$，交换律，

$x + (y + z) = (x + y) + z$，结合律.

对任何向量 x 和 z 有而且仅有一个向量 y. 使 $x + y = z$

$1\,x = x$，$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$，结合律.

$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$，$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$，分配律.

注意如果我们将向量 x, y, z 换成函数 f, g, φ，α 和 β 仍看作普通的数，把向量加法理解成函数之间的加法、数和向量的相乘理解成数和函数的相乘，那么上述一些性质仍然成立. 因此我们讨论一些元素的集合 X，X 既可以是向量，也可以是函数，还可以是别的东西. 在 X 上定义两种运算，一种叫做元素之间的加法，一种叫做元素和数的乘法，规定它们必须满足前面所说的性质. 这样的定义是抽象的，但正因其抽象，它才有广泛的应用.

现在用数学语言来表达前面的思想. 如果在集合 X 上定义了加法 $x + y$ 以及乘以常数的乘法 αx，并满足以下关系: 如果 $x \in X$，$y \in X$ 那么 $x + y \in X$，$\alpha x \in X$，其中 α 是任意实数. $x + y = y + x$，$x + (y + z) = (x + y) + z$，对一切 x 和 z 有且仅

有一个 y，使得 $x+y=z$，$1\cdot x=x$。对任何实数 α 和 β，$(\alpha\beta)(x)=\alpha(\beta x)$，$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，则称 X 为一个线性空间。这里对一切 x 和 z 有且仅有一个 y，使得 $x+y=z$。这里包含两个特殊意思，(1) 如果 $z=x$，则认为 y 是零元素. (2) 如果 z 是零元素，则 y 为 $-x$。下面给出线性空间的一些例子.

例 2.2.1 设 X 是所有 n 维向量的集合，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，α 是任意实数，定义：

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

容易验证这样定义的 X 构成一个线性空间。

例 2.2.2 设 X 是定义在有界闭域 Ω 上的全体实值连续函数 $f(x)$ 的集合，定义 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$，可以验证 X 是线性空间。

例 2.2.3 设 X 是所有定义在 Ω 上 Lebesgue 平方可积的函数 $f(x)$ 全体的集合. 按例 2.2.2 的方法定义加法和乘法，则 X 是线性空间.

例 2.2.4 所有不超过 n 次的多项式按照例 2.2.2 或例 2.2.3定义的加法和乘法构成一个线性空间. 它是例 2.2.3 和例 2.2.3 所示的线性子空间.

例 2.2.5 所有 Ω 上无穷多次连续可微函数的集合按前面所定义的加法和乘法也构成线性空间，它显然比例2.2.2和例2.2.3所给定的空间小，但比例2.2.4给定的空间大.

例 2.2.6 满足 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的无穷多次连续可微函数的全体，按前面给定的加法和乘法也构成线性空间，它显然是例2.2.5所给空间的子空间.

线性空间建立在向量代数运算的基础上，但只有代数运算还不能构成几何，为研究几何必须在线性空间 X 中定义长度. 我们对线性空间 X 的每个元素定义了一个相当于向量长度的数 $\|X\|$，并使其满足以下条件，

(1) $\|x\| \geq 0$，且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

(2) 对任意实数 α 及 X 中的任意元素 x，$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(3) 对 X 中的任意元素 x 和 y，$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (2.2.1)

以后把这三条叫做范数公理. 范数相当于长度，线性赋范空间相当于定义了长度的线性空间. 这里定义长度的手法仍然是先研究长度具有哪些基本性质，然后把满足这些性质的对象叫做长度. 先考虑二维向量空间，每个向量都有一个长度，用数学语言来说，对每个向量 x，都有一个实数 $\|x\|$ 与之对应. 向量的长度应是非负的，向量的长度是零当且仅当它是零向量. 用数学符号表示就是

$$\|x\| \geq 0 \text{ 且 } \|x\| = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0.$$

这就是范数公理第一条. 在二维空间中 $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$，$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} = |\alpha|\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \alpha\|x\|$. 这条性质可以写成 $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，这就是范数公理的第二条. 在平面上给定三角形如图所示，由于三角形任意两边之和大于第三边. 因此 $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$，这就是范数公理的第三条. 因此三条范数公理完全是从现实长度所具有的性质中提炼出来的. 现在反过来，对 X 中任一元素 x，使其对应于一个实数 $\|x\|$，不管这种对应的形式如何，只要它满足三条范数公理，就把 $\|x\|$ 叫做 x 的范数，或者叫做 x 的长度，X 叫做线性赋范空间. 也就是定义了长度的空间. 这样定义了范数之后，大大扩展了长度的范围，普通的向量长度只是它的一种特殊形式，还有许多表面看来完全不同的东西也成了长度. 下面举例说明这点.

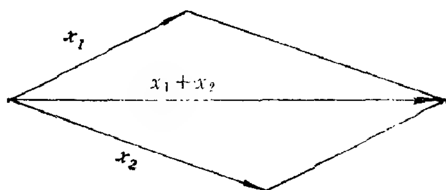


图 2.2.1

例 2.2.7 设 X 是 n 维向量组成的集合，若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 X 中的任意向量，α 是任意实数，定义 $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$，$\alpha x = (\alpha x_1, \cdots,$

αx_n)．前面已经指出，这时 X 构成一个线性空间． 如果我们定义 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$，这就是普通 n 维向量的长度，它显然满足范数公理． 因此对这样定义的范数，X 构成线性赋范空间。

例 2.2.8 设 X 是所有在 Ω 上 Lebesgue 平方可积函数 $f(x)$ 的全体，它按照 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$，$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ 构成一个线性空间，如果在 X 中定义范数：

$$\|f\| = \left(\iint_\Omega |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.2}$$

它显然满足范数公理前两条，第三条如下证明：

$$\|f+g\|^2 = \iint_\Omega |f(x) + g(x)|^2 d\Omega = \iint_\Omega f^2 d\Omega + \iint_\Omega g^2 d\Omega + 2\iint_\Omega fg d\Omega.$$

根据 Schwarz 不等式

$$\iint_\Omega fg d\Omega \leqslant \left(\iint_\Omega f^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_\Omega g^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

因此 $$\|f+g\|^2 \leqslant \iint_\Omega f^2 d\Omega + \iint_\Omega g^2 d\Omega + 2\left(\iint_\Omega f^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\iint_\Omega g^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\left(\iint_\Omega f^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_\Omega g^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

从而 $$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

因此范数 (2.2.2) 满足范数公理 (2.2.1)，亦即 X 构成线性赋范空间，记以 $L^2(\Omega)$。

例 2.2.9 定义在闭域 Ω 上的全体实值连续函数 $f(x)$ 的全体按 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ 构成线性空间，如果我们定义

$$\|f\| = \max_{x\in\Omega} |f(x)|, \tag{2.2.3}$$

亦即 $\|f\|$ 定义成 $|f(x)|$ 在 Ω 上的最大值，可以验证它是一个赋

范线性空间。事实上，(2.2.1) 的前两条显然满足，至于第三条，设 $(f+g)(x)$ 在 x_0 点取最大值，则

$$\|f+g\| = \|(f+g)(x_0)\| = |f(x_0)+g(x_0)| \leqslant |f(x_0)| + |g(x_0)| \leqslant \max_{x\in\Omega}|f(x)| + \max_{x\in\Omega}|g(x)| = \|f\| + \|g\|,$$

即第三条也满足。 这个线性赋范空间记以 $C(\Omega)$ 意思是指 Ω 上的全体连续函数，并且以 (2.2.3) 为范数，这个空间也叫 C 空间。

有了长度就可以定义距离。空间 X 中任意两个元素 x 和 y 之间的距离可以定义成

$$\rho(x,y) = \|x-y\|,$$

即点 x 与点 y 之间的距离等于向量 $x-y$ 的长度。有了距离就可以定义极限。设序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的元素，如果能在 X 中找到一个元素 x_0，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$，就称序列 $\{x_n\}$ 的极限是 x_0，记以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。对例 2.2.7 来说，$\rho(x_n,x_0)$ 就是普通的 Euclid 距离。收敛就是 Euclid 空间的收敛。对例 2.2.8，

$$\rho(f_n,f_0) = \max_{x\in\Omega}|f_n(x)-f_0(x)|.$$

这时收敛是一致收敛，也就是说若 f_n 按 C 空间的范数收敛于 f_0，则 $f_n(x)$ 在 Ω 上一致收敛于 $f_0(x)$。

对线性赋范空间我们可以证明下述结果。

定理 2.2.1 设 $x_n(n=1,2\cdots)$ 及 x_0 都是线性赋范空间 X 中的元素，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$；若 α_n 和 α_0 都是实数，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha_0$，那么还有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n x_n=\alpha_0 x_0$。

证明 先证明第一个结论，由于 $x_0=x_0-x_n+x_n$，所以 $\|x_0\|\leqslant\|x_0-x_n\|+\|x_n\|$，即 $\|x_0\|-\|x_n\|\leqslant\|x_0-x_n\|$。同理可得 $\|x_n\|-\|x_0\|\leqslant\|x_n-x_0\|$，因此 $|\|x_0\|-\|x_n\||\leqslant\|x_0-x_n\|$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$。下面证明第二个结论，由于

$$\rho(\alpha_n x_n,\alpha_0 x_0) = \|\alpha_n x_n - \alpha_0 x_0\| \leqslant \|\alpha_n x_n - \alpha_n x_0\| + \|\alpha_n x_0 - \alpha_0 x_0\| = |\alpha_n|\|x_n-x_0\| + |\alpha_n-\alpha_0|\|x_0\|,$$

以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha_0$，所以 $|\alpha_n|$ 是有界的，同时由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，所以 $\|x_n-x_0\|\to 0$，因此右端第一项当 $n\to\infty$ 时趋近于零. 在第二项中，由于 $\alpha_n\to\alpha_0$，故第二项当 $n\to\infty$ 时也趋近于0，综上所述可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n x_n=\alpha_0 x_0$.

对线性赋范空间不仅要考虑集合，还要考虑范数. 不同的集合当然是不同的线性赋范空间，对同一集合引进不同的范数也是不同的线性赋范空间. 例如在闭域 Ω 上的全体实值连续函数按照范数 (2.2.3) 构成 C 空间. 如果范数按 (2.2.2) 定义，那么尽管集合不变，却应看做不同的线性赋范空间. (2.2.2) 和 (2.2.3) 是不同的范数，与 (2.2.2) 对应的是均方收敛，与 (2.2.3) 对应的收敛是一致收敛. 我们知道，在有界闭域 Ω 上，一致收敛的函数必然均方收敛，而均方收敛的序列却不一定一致收敛. 研究不同的收敛用不同的范数. 例如研究一致收敛用范数 (2.2.3)，研究均方收敛用范数 (2.2.2)，我们还可以引进其它范数，例如考虑平面有界闭域 Ω 上一次连续可微函数的集合并引进范数

$$\|f\|=\left[\iint_{\Omega}|f|^2 d\Omega+\iint_{\Omega}|f_x|^2 d\Omega+\iint_{\Omega}|f_y|^2 d\Omega\right]^{1/2}. \tag{2.2.4}$$

容易证明这样的范数满足范数公理 (2.2.1)，对应于这种范数的收敛是函数本身及其一阶导数的均方收敛，如果对同一个集合，定义

$$\|f\|=\max_{(x,y)\in\Omega}|f(x,y)|+\max_{(x,y)\in\Omega}|f_x(x,y)|+\max_{(x,y)\in\Omega}|f_y(x,y)|. \tag{2.2.5}$$

容易验证 (2.2.5) 也满足范数公理，对应于范数 (2.2.5) 的收敛是函数本身连同其一阶导数的一致收敛. 这个空间也是线性赋范空间，记以 $C^1(\Omega)$. 一般说来，考虑有界闭域 Ω 上 k 次连续可微函数的集合，定义

$$\|f\|=\max_{(x,y)\in\Omega}|f(x,y)|+\max_{(x,y)\in\Omega}|f_x(x,y)|$$
$$+\max_{(x,y)\in\Omega}|f_y(x,y)|+\cdots+\max_{(x,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right|$$

$$+\max_{(x,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\right|+\cdots+\max_{(x,y)\in\Omega}\left|\frac{\partial^k f}{\partial y^k}\right|. \quad (2.2.6)$$

它也构成一个线性赋范空间，这个空间叫做 $C^k(\Omega)$. 与 (2.2.6) 对应的收敛是函数本身连同到 k 阶导数的一致收敛. (2.2.6) 写起来很复杂，为书写简便,我们引进新的记号,令

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\ D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}, \quad (2.2.7)$$

则 (2.2.6) 可以写成

$$\|f\|=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\max_{(x,y)\in\Omega}|D^\alpha f|. \quad (2.2.8)$$

引进这个记号有许多新的好处,如果记

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!,\ \binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},\ \alpha_i\geqslant\beta_i, \quad (2.2.9)$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (2.2.10)$$

则

$$u(X)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\frac{X^\alpha}{\alpha!}D^\alpha u(0)$$

可表示为

$$u(X)=u(x,y)=\frac{X^{(0,0)}}{(0,0)!}D^{(0,0)}u(0,0)+\frac{X^{(1,0)}}{(1,0)!}D^{(1,0)}u(0,0)$$

$$+\frac{X^{(0,1)}}{(0,1)!}D^{(0,1)}u(0,0)+\frac{X^{(2,0)}}{(2,0)!}D^{(2,0)}u(0,0)$$

$$+\frac{X^{(1,1)}}{(1,1)!}D^{(1,1)}u(0,0)+\frac{X^{(0,2)}}{(0,2)!}D^{(0,2)}u(0,0).$$

按照 (2.2.9) 和 (2.2.10)

$X^{(0,0)}=x^0y^0=1$, $X^{(1,0)}=x^1y^0=x$, $(0,0)!=0!0!=1$, $(1,0)!=1!0!=1$, 等等.

按照 (2.2.7), $D^{(0,0)}u(0,0)=u(0,0)$, $D^{(1,0)}u(0,0)=\dfrac{\partial^{1+0}}{\partial x^1\partial y^0}\cdot u(0,0)=\dfrac{\partial u(0,0)}{\partial x}$, $\cdots$ 得到 $u(x,y)=u(0,0)+x\dfrac{\partial u(0,0)}{\partial x}$

$+y\dfrac{\partial u(0,0)}{\partial y}+\dfrac{x^2}{2!}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x\partial y}+\dfrac{y^2}{2!}\dfrac{\partial^2 u(0,0)}{\partial y^2}$，这是二元函数 Taylor 展开的前六项．用这个符号可以将二元函数的 Taylor 展开写成

$$u(x+y)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{y^\alpha}{\alpha!}D^\alpha u(x).$$

这样多元函数的 Taylor 展开就和一元函数 Taylor 展开有相同的形式。

类似地我们还可以定义范数

$$\|f\|_k=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left(\iint_\Omega |D^\alpha f|^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.11}$$

全体在 Ω 上 k 次连续可微的函数按范数 (2.2.11) 也构成一个线性赋范空间，这个空间暂不命名，下一节将详细讨论．范数 (2.2.11) 常记以 $\|\cdot\|_k$，按范数 $\|\cdot\|_k$ 的收敛是函数本身以及直到 k 阶的各阶导数的均方收敛．当 $k=0$ 时，(2.2.11) 就是 (2.2.2)，$k=1$ 时，(2.2.11) 就是 (2.2.4)．$k=2$ 时，则为

$$\|f\|_2=\left[\iint_\Omega (f^2+f_x^2+f_y^2+f_{xx}^2+f_{xy}^2+f_{yy}^2)d\Omega\right]^{1/2}, \tag{2.2.12}$$

同时我们引进记号

$$|f|_k=\left[\sum_{|\alpha|=k}\iint_\Omega |D^\alpha f|^2 d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.13}$$

当 $k=1$ 时

$$|f|_1=\left(\iint_\Omega (f_x^2+f_y^2)d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2.14}$$

除由 $|f|_k=0$ 不能推出 $f=0$ 外，$|\ \ |_k$ 满足其它范数公理，我们称之为半范数．但若对 f 加以某些限制，$|\ \ |_k$ 也可以构成范数．例如若 $f\in C^1(\Omega)$，并满足 $f|_{\partial\Omega}=0$，则由 $|f|_1=0$ 可以推出 $f=0$，从而 $|\ \ |_1$ 构成一个范数。

如果对一个线性空间 X，引进两个范数 $\|\ \ \|_1$ 和 $\|\ \ \|_2$，那么存在两个正数 C_1 和 C_2，使对 X 中的任意元素 x 都有

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \tag{2.2.15}$$

就说范数 $\|\ \|_1$ 和范数 $\|\ \|_2$ 是等价的.显然如果范数 $\|\ \|_1$ 和范数 $\|\ \|_2$ 等价,那么一个序列若按范数 $\|\ \|_1$ 收敛，也就按范数 $\|\ \|_2$ 收敛．事实上若 $\|x_n - x_0\|_1 \to 0$，由 (2.1.14) 可知 $\|x_n - x_0\|_2 \to 0$，从而 x_n 按范数 $\|\ \|_2$ 也收敛．反过来若 x_n 按范数 $\|\ \|_2$ 收敛于 x_0，那么按范数 $\|\ \|_1$ 也收敛于 x_0.

有趣的是对有限维线性赋范空间，所有范数都是等价的．在证明这个结果之前,我们先回顾一下数学分析中的一条重要原理,这就是 Bolzano-Weierstrass 的聚点原理：Euclid 空间中的任一有界无穷集合中都能抽出一个收敛的子序列．这个原理可以简单地叙述成 Euclid 空间中有界集必是紧致集，这里紧致就是任一无穷集合都有一个收敛的子序列．这个原理是近代数学分析的基石,它刻划了 Euclid 空间的主要特征,十分重要．下面我们叙述并证明有限维线性赋范空间中所有范数等价这条定理.

定理 2.2.2 若 X 是有限维线性赋范空间,则 X 上的所有范数等价.

证明 由于 X 是有限维空间,所以存在一组基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使得对任意 $x \in X$，都有 $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$，从而

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,\|e_k\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

记 $m = \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2}$，则有 $\|x\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$．任取 $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \in X$，$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$，这说明 $\|x\|$ 是 E^n 上的连续函数．记 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \|x\|$，当 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 位于 E^n 的单位球面上，即 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ 时，$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \neq 0$．实际上,若 $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = 0$，由于

$e_1, \cdots, e_n$

线性无关，则 $x_k=0\ (k=1,2,\cdots,n)$，与 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2=1$ 矛盾.

因此 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在球面 $\sum_1^n x_k^2=1$ 上处处不为零. 因为单位球面 S 是 E^n 中的有界闭集，$\|x\|$ 在 S 上取得正的最小值 M_1 和最大值 M_2。于是对任意的 $x\in X$，令 $x'=\dfrac{x}{\left(\sum_1^n x_k^2\right)^{1/2}}$，则有

$M_1\leqslant\|x'\|\leqslant M_2$，因此有 $M_1\left(\sum_1^n x_k^2\right)^{1/2}\leqslant\|x\|\leqslant M_2\left(\sum_1^n x_k^2\right)^{1/2}$，从而$\|\ \ \|$与 Euclid 范数等价.

由定理 2.2.2 可知，次数不超过 n 的多项式空间上的所有范数都是等价的，因此对多项式而言均方收敛、一致收敛、若干阶导数的一致收敛、若干阶导数的均方收敛等，都是等价的. 这点对无限维空间显然不成立. 众所周知，均方收敛和一致收敛是不等价的.

前面讲到 Bolzano-Weierstrass 的聚点原理是近代分析的基石，恰恰是这块基石在无穷维空间中不成立。在 n 维 Euclid 空间中，存在一组标准正交系 $e_1=\{1,0,\cdots,0\}$，$e_2=\{0,1,0,\cdots,0\}$，$\cdots$，$e_n=\{0,0,\cdots,1\}$，对任一 $x\in E^n$，都有 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，$\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$\|e_i\|^2=1$，$\|e_i-e_j\|^2=2\ i\neq j$. 容易想象，在无穷维空间中有一组标准直交系 $e_1=\{1,0,\cdots\}$，$e_2=\{0,1,0,\cdots\}$，$e_n=\{\underbrace{0,0,\cdots 0}_{n-1\text{个}},1,0\cdots\}$.

对任意函数 f，$f=\sum_{i=1}^{\infty} f_ie_i$，$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$，$\|e_i-e_j\|^2=2$，$i\neq j$，$\|e_i\|^2=1$，注意 e_1，e_2，$\cdots$，e_n，$\cdots$ 是一个无穷序列，$\|e_i\|=1$，$i=1,2,\cdots$ 因此是有界集。但是当 $i\neq j$ 时，$\|e_i-e_j\|^2=2$. 所以 $\{e_i\}$ 没有收敛的子序列. 因此无穷维空间中有界集未必紧致. 既然有限维空间中有界集必然紧致，对无限维空间这个性质未必成立。自然会问，若一个线性赋范空间中任意有界集都是紧致集，那么这个空间是否为有限维空间？为了回

答这个问题先证明一个引理。

引理 2.2.1 (Riesz) 设 X_1 是线性赋范空间X的真闭子空间，则对任意 $\varepsilon > 0$，必存在X中的单位元素 y，使得对任意 $x \in X_1$，都有 $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$.

证明 设 y_0 是X中不属于 X_1 的元素，$d = \inf\limits_{x \in X_1}\|y_0 - x\|$，则 $d > 0$. 对任意给定的 $\eta > 0$，总存在 $x_0 \in X_1$，使得

$$d \leqslant \|y_0 - x_0\| < d + \eta.$$

设 $y = \dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$，由于 $y_0 \bar{\in} X_1$，显然 $y \in X$，$\|y\| = 1$，对任意 $x \in X_1$，$\|y - x\| = \left\|\dfrac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x\right\| = \dfrac{1}{\|y_0 - x_0\|}\|y_0 - x'\| > \dfrac{1}{d + \eta}$ $\cdot\|y_0 - x'\| \geqslant \dfrac{d}{d + \eta} = 1 - \dfrac{\eta}{d + \eta}$，此处 $x' = x_0 + \|y_0 - x_0\|x$ $\in X_1$. 选取η使 $\dfrac{\eta}{d + \eta} < \varepsilon$，则有 $\|y - x\| > 1 - \varepsilon$.

定理 2.2.3 线性赋范空间X的子空间 X_1 为有限维的充要条件是 X_1 中的每个有界集是紧致的.

证明 若 X_1 是有限维空间，由定理 2.2.2 可知，X_1 等价于 Euclid 空间，则有界集必是紧致的. 因此只要证明反过来的命题，即若 X_1 中任一有界集皆是紧致集，则 X_1 必为有限维空间. 在 X_1 中任取元素 x_1，由 x_1 生成空间 L_1，若 X_1 与 L_1 重合，则 X_1 为有限维空间. 若 L_1 与 X_1 不重合，由引理可知则存在 $x_2 \in X_1$，使 $\|x_2\| = 1$，$\|x_2 - x_1\| \geqslant \dfrac{1}{2}$，由 x_1 与 x_2 生成子空间 L_2，若 L_2 与 X_1 重合，则命题得证.

若不然，由引理可知存在 $x_3 \in X_1$，使 $\|x_3\| = 1$，$\|x_3 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$，$\|x_3 - x_2\| \geqslant \dfrac{1}{2}$. 如此作下去，若有限步终结，即存在正整数 k，使 L_k 与 X_1 重合，则 X_1 为有限维空间，命题得证. 若一直作下去，则构造出序列 $\{x_k\}$，$\|x_k\| = 1$，$\|x_i - x_j\| \geqslant \dfrac{1}{2}$，$i \neq j$.

显然 $\{x_k\}$ 是有界集，并且不是紧致集，与假设矛盾，定理得证.

这个定理说明紧致性的重要性. 有界集紧致是有限维空间的特征，是有限维和无限维的分水岭. 可以设想，有限维空间中与紧致性无关的性质有可能推广到无限维空间，与紧致性有关的性质推广起来则有原则性的困难.

在第一章中我们将 Poisson 方程的第一边值问题归结为求一类泛函的极值问题，为了解决更一般的问题，使我们考虑的问题尽量广泛，我们引进一些新的概念. 若对线性空间 X 的子空间 $\mathscr{D}$ 的各元素 x，有线性空间 X_1 (可以与 X 一致，也可以与 X 不一致)中的元素 Tx 与之对应，并且这个对应关系 T 对任意常数 α 和 β 满足关系

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty, \tag{2.2.16}$$

称 T 为加法算子，$\mathscr{D}$ 叫做 T 的定义域，记以 $\mathscr{D}(T)$. 对于 $\mathscr{D}(T)$ 中所有的 x，对应的 Tx 的集合叫做 T 的值域，记以 $R(T)$. 若 T 的值域 $R(T)$ 是实数或复数时，我们称 T 为加法泛函. 加法算子和加法泛函是很广泛的概念. 下面我们给出一些例子.

例 2.2.10 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij}, x_i, $y_i(i,j=1,2\cdots n)$ 是任意实数，则 $Y=AX$ 是定义在 n 维 Euclid 空间 E^n 上的加法算子，设 $a=(a_1,a_2\cdots a_n)\in E^n$，则 $y=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ 是定义在 n 维 Euclid 空间 E^n 上的加法泛函.

例 2.2.11 设 $K(s,t)$ 为定义于 $0\leqslant s\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的连续函数，则关系式

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$

定义一个算子 K。对于 $C[0,1]$中的任一函数 $x(t)$，有 $C[0,1]$中的一个函数 $y(s)$ 与之对应，容易验证这个对应满足条件(2.2.16)，因此K是加法算子。在这个例子中，$D(T)=C[0,1]$，$R(T)\subset C[0,1]$。若 $f(t)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 f(t)x(t)dt$ 是 $C[0,1]$ 上的加法泛函。

例 2.2.12 设 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$是二维 Laplace 算子。容易验证$\Delta$是 $C^2(\Omega)$ 上的加法算子。

(2.2.16) 是个代数条件，我们要研究微积分和微分方程必须研究极限和连续。因X是线性赋范空间，设 $\{x_n\}$ 和 x 是 $\mathscr{D}(T)$ 中的任意元素，如果当 $x_n\to x$ 时恒有 $Tx_n\to Tx$，则称T是连续算子。例 2.2.10 显然是连续算子，例 2.2.11 也是连续算子。若 $x_n(t)$ 一致收敛于零，显然 $y_n(s)$ 一致收敛于零。实际上由 Schwarz 不等式可知

$$|y_n(s)-0|=\left|\int_0^1 K(s,t)x_n(t)ds-0\right|\leqslant\int_0^1|K(s,t)x_n(t)|dt$$

$$\leqslant\left[\int_0^1|K(s,t)|^2dt\right]^{1/2}\left[\int_0^1 x_n^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\max_{0\leqslant s,\ t\leqslant 1}|K(s,t)|\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)|.$$

由于 $K(s,t)$ 和 $x_n(t)$ 都是连续函数，因此这些最大值是存在的。由于 $|x_n(t)|$ 一致收敛于零，因而 $y_n(s)$ 也一致收敛于零。

关于例 2.2.11 定义的算子K我们还可以证明更多的性质

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|^2\leqslant\left(\int_0^1(K(s_1,t)-K(s_2,t))x_n(t)dt\right)^2$$

$$\leqslant\int_0^1(K(s_1,t)-K(s_2,t))^2dt\int_0^1 x_n^2(t)dt.$$

设 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)|\leqslant M$，$n=1,2\cdots$，则

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|\leqslant M^2\int_0^1|K(s_1,t)-K(s_2,t)|^2dt,$$

由于 $K(s,t)$ 在 $0\leqslant s\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致连续，因而 $y_n(s)$ 等度一致连续，即对任给 $\varepsilon>0$，存在与n无关的δ，使得对任意

$s_1 \in [0,1]$ 和 $s_2 \in [0,1]$，只要 $|s_1 - s_2| < \delta$，就有

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| < \varepsilon.$$

另外

$$|y_n(s)|^2 = \left(\int_0^1 K(s,t)x(t)dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 K^2(s,t)dt \int_0^1 x_n^2(t)dt.$$

所以

$$\max_{s\in[0,1]} |y_n(s)| \leqslant M\int_0^1 K^2(s,t)dt \leqslant MN^2,$$

其中 N 是 $|K(s,t)|$ 在 $0 \leq s \leqslant 1$，$0 \leqslant t \leqslant 1$ 上的最大值，亦即 $|y_n(s)|$ 在 $[0,1]$ 上一致有界. 由 Ascoli-Arzela 定理知，一致有界和等度连续的函数序列必有一致收敛的子序列. 用泛函分析的术语来说，$|x_n(t)| \leqslant M$，表示 $x_n(t)$ 属于 $C[0,1]$ 中的一个有界序列. $y_n(s) = Kx_n$ 有一致收敛的子序列表示 Kx_n 是 $C[0,1]$ 中的紧致集. 因此 $y = Kx$ 把 $C[0,1]$ 中的有界集变成 $C[0,1]$ 中的紧致集. 具有这种性质的算子是紧算子，紧算子是具有很强性质的算子，许多很好的算子甚至恒等算子都不是紧算子.

例 2.2.13 设 $\mathscr{D}$ 是 $[0,1]$ 上两次连续可微函数的集合，则 $\frac{d^2}{dt^2}$ 是从 $\mathscr{D}$ 到 $C[0,1]$ 的加法算子.

在例 2.2.12 中由于 $\mathscr{D}(T) \subset C^2(\Omega)$，所以 Δ 是连续算子. 在例 2.2.13 中，若认为 $\mathscr{D} \subset C[0,1]$，采用 $C[0,1]$ 的范数，则例 2.2.13 不是连续算子，取 $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$，显然 $\{x_n(t)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零，而 $x_n''(t) = (n-1)t^{n-2}$，显然不一致收敛. 但是如果改换空间，例如说不把 $x_n(t)$ 看作 $C[0,1]$ 中的元素，而是看作 $C^2[0,1]$ 中的元素. 采用 $C^2[0,1]$ 的范数，那么 $\frac{d^2}{dt^2}$ 就是连续算子.

下面给出加法算子是连续算子的条件.

定理 2.2.4 加法算子连续的充分必要条件是存在常数 C 使得 $\mathscr{D}(T)$ 中的一切 x 都有 $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$.

证明 充分性：由

$$\|Tx - Tx_n\| = \|T(x - x_n)\| \leqslant C\|x - x_n\|,$$

即可得到。

必要性：用反证法．若不然，则对任意给定的 C，$\|Tx\| \leq C\|x\|$ 都不能对所有的 x 成立．取 $C = n$，则必有元素 x_n，使得 $\|Tx_n\| > n\|x_n\|$．令 $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}\,\|x_n\|}$，显然 $\|y_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$，当 $n \to \infty$ 时，$\|y_n\| \to 0$，而 $\|Ty_n\| = (\sqrt{n}\,\|x_n\|)^{-1}\|Tx_n\| > \sqrt{n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} Ty_n \neq 0$，这与 Tx 在 0 点的连续性矛盾，必要性得证。

如果存在常数 C，使得对于 $\mathscr{D}(T)$ 中的一切 x 都有

$$\|Tx\| \leqslant C\|x\|,$$

则把 T 叫作有界算子．定理 2.2.4 也可以叙述成：一个加法算子为连续算子的充要条件是它是有界算子．从定理 2.2.4 还可以看出，若 $\mathscr{D}(T) = X$，则加法算子 T 的连续性等价于 $\|Tx\|$ 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上有界．事实上，若 C 是 $\|Tx\|$ 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上的上界，则对空间 X 中的任一元素 x，$\dfrac{x}{\|x\|}$ 显然在单位球面上，从而 $\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant C\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = C$，因此 $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$．若我们取 $C = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$，则对 X 中的一切 x 都有 $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$，其中 $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$ 表示 $\|Tx\|$ 在 $\|x\| \leqslant 1$ 上的最小上界．$\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$ 叫作算子 T 的范数，记以 $\|T\|$．由于加法泛函是加法算子的特例，因此加法泛函连续的充要条件是这个泛函有界．如果加法算子是连续的，这个算子叫做线性算子．类似地把连续的加法泛函叫作线性泛函．这里线性泛函既包括代数上的线性，又包括泛函的连续性，既然加法泛函连续的充要条件是这个泛函有界，因此线性泛函总是有界的，和算子一样，定义线性泛函的范数

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

下面考虑加法算子方程

$$Tx = f, \tag{2.2.17}$$

由于加法算子可以是矩阵、微分算子或积分算子，因此 (2.2.17) 可以是线性代数方程组，线性常微分方程、线性偏微分方程或者线性积分方程. (2.2.17) 的解记以 $x=T^{-1}f$，T^{-1} 叫做 T 的逆算子. 若对 $R(T)$ 中的任一个 f 有而且只有一个 x 使 $Tx=f$，就说 $\mathscr{D}(T)$ 与 $R(T)$ 是一一对应的.

例 2.2.14 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

则算子 A 的定义域和值域都是整个平面，并且算子 A 建立了平面到平面的一一对应.

例 2.2.15 $\frac{d}{dx}$ 是从 $C^1[0,1]$ (即 $[0,1]$ 上一次连续可微函数的集合)到 $C[0,1]$ 的加法算子，这个算子不是一一对应的. 因为若 $g=\frac{df}{dx}$，则对任意常数 C，$f+C$ 的导数也是 g，若将 $\frac{d}{dx}$ 的定义域 $\mathscr{D}\left(\frac{d}{dx}\right)$ 限制为满足 $f(0)=0$ 的 $[0,1]$ 上一次连续可微函数集合，则 $\frac{d}{dx}$ 就是 $\mathscr{D}\left(\frac{d}{dx}\right)$ 和 $R\left(\frac{d}{dx}\right)$ 之间的一一对应.

研究数学物理问题时，我们常常关心解的存在性，唯一性和连续相依性，即方程 (2.2.17) 是否有解，如果有解是否唯一，当 f 改变很小时，解 x 的改变是否也很小. 因为在实际问题中 f 常常只能近似给定，我们当然希望这时求出的解能接近真实的解. 如果加法算子的定义域和值域都在某个线性赋范空间之中，我们有下述的结果.

定理 2.2.5 加法算子 T 具有连续逆算子的充分必要条件是存在正数 C，使得对于 $\mathscr{D}(T)$ 中的一切 x 都有

$$\|Tx\| \geqslant C\|x\|. \tag{2.2.18}$$

证明 必要性：假设 T^{-1} 存在且连续，容易验证 T^{-1} 是加

法算子，据定理 2.2.4，T^{-1} 也是有界算子．由于 $x = T^{-1}Tx$，并且 T^{-1} 是有界算子．设 $\|T^{-1}\| = \frac{1}{C}$，则 $\|x\| \leqslant \frac{1}{C}\|Tx\|$，从而 (2.2.18) 成立．

充分性：假设 (2.2.18) 成立，显然 $x_1 \neq x_2$ 时，$Tx_1 \neq Tx_2$，因此对每个 Tx 都有而且只有一个 x 与之对应，所以 T^{-1} 存在．显然 T^{-1} 的定义域是 $R(T)$，而值域是 $\mathscr{D}(T)$，由 (2.2.18) 及 $x = T^{-1}Tx$，$\|Tx\| \geqslant C\|T^{-1}Tx\|$，从而 $\|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \frac{1}{C}\|Tx\|$ 对 $R(T)$ 中的任意 Tx 都成立，因此 T^{-1} 是连续算子，这就证明了定理 2.2.5．

不等式 (2.2.18) 很重要，有了 (2.2.18) 不仅能保证方程 2.2.17 解的存在性，唯一性和连续相依性，还可以用来研究近似解法的收敛性和误差估计．假设用某种方法求得 (2.2.17) 的一个近似解 x_n，由于 T 是加法算子，在 (2.2.18) 中用 $x_n - x$ 代替 x 就有

$$\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{C}\|Tx_n - Tx\|.$$

若 x 是方程的真解，则 $Tx = f$，因此近似解与真解的差可由

$$\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{C}\|Tx_n - f\|,$$

来估计．显然只要 $\|Tx_n - f\| \to 0$，就有 $\|x_n - x\| \to 0$．

对于紧算子 K，考虑方程 $y = \lambda Ky$，这个方程的解构成一个线性空间 N．假设 $y \in M \subset N$，M 是 N 中的有界集，由于 $y = \lambda Ky$，这里 λ 是任意不为零的常数，因此 $\lambda KM = M$．由于 λK 是紧算子，M 是有界集，而紧算子映有界集为紧致集，因此 $M = \lambda KM$ 是紧致集．由于空间 N 中任意有界集 M 都是紧致集，由定理 2.2.3 可知，M 是有限维空间．

定理 2.2.6 设 K 是由 X 到 X 的紧算子，N 是 $y = \lambda Ky$ 的解空间，则 N 是有限维空间．

在第一章中我们曾用代数类比的方法建立了 Fredholm 理论，但是未给证明．从定理 2.2.3 可知，有限维空间的结果对无限维空间

不一定成立，特别是与紧性有关的结果未必成立. 那么 Fredholm 怎样把有限维空间的结果推广到无限维空间，把代数方程组的结果推广到积分方程呢? 这里 $\lambda\int_0^1 K(x,t)y(t)dt$ 是紧算子，变有界集为紧集，因此可以保留有限维空间较多的性质. 特别是我们希望证明当 $(I-\lambda K)y=0$ 只有零解时，$\forall f\in X$，$(I-\lambda K)y=f$ 对任意 f 有且仅有一解，也就是若齐次方程只有零解，则非齐次方程对任意右端项都有而且仅有一解. 这是线性代数方程组结论的自然推广. 为此我们证明下述定理.

定理 2.2.7 若 $K: X\to X$ 是紧算子，则$R(I+\lambda K)$ 是闭集，若$(I+\lambda K)y=0$ 只有零解，则 $\forall f\in X$，$(I+\lambda K)=f$ 有且仅有一解.

证明 先证明 $R(I+\lambda K)$是闭集，即 $R=\bar{R}$. 任取 $y_0\in\bar{R}$，则存在 $\{y_n\}\subset R$ 使 $\{y_n\}\to y_0$. 对每个 y_n 由假设存在 $x_n\in X$ 使 $x_n+\lambda Kx_n=y_n$. 若 $\{x_n\}$ 是有界集，λKx_n 是有界集，必有收敛子列 λKx_{n_k}. 由于 $y_{n_k}\to y_0$，λKx_{n_k} 收敛，故 $x_{n_k}=y_{n_k}-\lambda Kx_{n_k}$ 也收敛. 设 $x_{n_k}\to x_0$，由于 $I+\lambda K$ 是连续算子，则 $x_0+\lambda Kx_0=y_0$，即 $y_0\in R$. 因此只需证明 $\{x_n\}$ 是有界集即可.

一般地说$\{x_n\}$可能是无界的. 记 $x=\lambda Kx$ 的解空间为 N.对任意 $x'_n\in N$ 及任意常数 α_n，$(I+\lambda K)(x_n+\alpha_n x'_n)=y_n$，选择 α_n，x'_n 使 $\|x_n+\alpha_n x'_n\|$ 最小. 取 $\alpha_n=-1$，即 $\|x_n-x'_n\|$ 最小. 设 $\rho(x_n,N)=d_n$，选择 $x'_n\in N$，使

$$\|z_n\|=\|x_n-x'_n\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)d_n,$$

那么 x'_n 差不多就是N中与 x_n 最近的点，而且 $(I+\lambda K)(x_n-x'_n)=y_n$. 令 $z_n=x_n-x'_n$，我们试图证明 z_n 有界. 若 z_n 无界，这个问题就没有希望了. 为要证明 z_n 有界，只需证明 d_n 有界，假如 d_n 无界，不妨令 $d_n\to\infty$ $\frac{\|z_n\|}{d_n}<1+\frac{1}{n}$，令 $\|z'_n\|=$

$\frac{x_n}{\|d_n\|}$, $\|z_n'\| < 1 + \frac{1}{n}$. $(I + \lambda K)z_n' = \frac{y_n}{d_n}$. 由于 $y_n \to y_0$, $d_n \to \infty$ 故 $\frac{y_n}{d_n} \to 0$. 从而 $(I + \lambda K)z_n' \to 0$. 注意 $z_n' = \frac{y_n}{d_n} - \lambda K z_n'$, $\frac{y_n}{d_n} \to 0$. $\{z_n'\}$ 有界，$\lambda K z_n'$ 紧致，故 z_n' 有收敛子列。不失一般性，设 $z_n' \to z_0'$, 显然 $(I + \lambda K)z_0' = 0$ 即 $z_0' \in N$, 但 $\|z_n' - z_0'\| = \left\|\frac{x_n - x_n'}{d_n} - z_0'\right\| = \frac{1}{d_n}\|x_n - (x_n' + d_n z_0')\| \geqslant 1$, 最后一步由 $x_n' + \alpha_n z_0' \in N$ 得出。这与 $z_n' \to z_0'$ 矛盾，因此第一个结论成立。

对第二个结论只须证 $R(I + \lambda K) = X$. 如果不然，设 $R(I + \lambda K) = X_1$, 则 X_1 是X的真闭子空间。设 $(I + \lambda K)X_1 = X_2$, 由于$X_1 \subset X$, $(I + \lambda K)X = X_1$, 显然 $X_2 \subset X_1$ 且 X_2 是 X_1 的真闭子空间。若不然，取 $x_0 \in X/X_1$, 由于 $(I + \lambda K)X = X_1$, 故$(I + \lambda K)x_0 \in X_1$. 另外 $(I + \lambda K)X_1 = X_2 = X_1$, 故 $\exists y_0 \in X_1$, 使得 $(I + \lambda K)y_0 = (I + \lambda K)x_0$, 即 $(I + \lambda K)(y_0 - x_0) = 0$, 而 $x_0 \neq y_0$, 与假设矛盾。因此 X_2 是 X_1 的真闭子空间。如此下去可构造一串子空间 X_m,使 $(I + \lambda K)X_m = X_{m+1}$, X_{m+1} 是 X_m 的真闭子空间.于是据 F. Riesz 引理,可构造序列$\{x_m\}$使 $x_m \in X_m$, $\|x_m\| = 1$, 以及 $\rho(x_m, X_{m+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. 由于 $\lambda K x_m - \lambda K x_n = (I + \lambda K)x_m - (I + \lambda K)x_n + x_n - x_m = -x_m + (x_n + (I + \lambda K)x_m - (I + \lambda K)x_n)$,设 $n > m$, 注意 $x_n \in X_n \subset X_{m+1}$, $(I + \lambda K)x_n \in X_{n+1} \subset X_{m+1}$, $(I + \lambda K)x_m \in X_{m+1}$. 令 $y = x_n + (I + \lambda K)x_m - (I + \lambda K)x_n$, 则 $y \in X_{m+1}$. 由于 $\rho(x_m, X_{m+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. 因此

$$\|\lambda K x_m - \lambda K x_n\| = \|x_m - y\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以 $\{\lambda K x_n\}$ 没有收敛子列。这与 $\|x_n\| = 1$, λK 是紧算子矛盾。证毕。

现在我们对无穷维空间中含紧算子的一类方程证明了与有限维空间相似的定理，旧的体系业已崩溃，而新的体系随之建立起

来，并在更广的范围内得到应用。

为了讨论 Fredholm 第三定理，需要引进一些新的概念。如果X是线性赋范空间，那么X上线性泛函也构成一个线性空间，赋以范数 $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$，也构成一个线性赋范空间。这个线性赋范空间叫做$X$的共轭空间(对偶空间，伴随空间)，记以$X^*$.为了对共轭空间作些具体的了解，详细分析二维 Euclid 空间的共轭空间。对二维 Euclid 空间，线性泛函的一般形式为 $f(x) = f_1x_1 + f_2x_2 = (f, x)$，其中 $f = (f_1, f_2)$，$x = (x_1, x_2)$。$\frac{(f, x)}{\|f\|}$ 是 x 在 f 上的投影，X的共轭空间是由一切 (f, x) 构成的空间，因此X的共轭空间 X^* 是X的各种投影构成的空间，是X的影子空间。所以 X^* 也叫作对偶空间或伴随空间。一个向量由它各方面的投影所决定，投影是坐标也是线性泛函，正如同坐标是研究向量锋利的工具一样，线性泛函是研究线性赋范空间锋利的工具。由于 (f, x) 由 f 决定，把 f 的范数 $\|f\|$ 叫作 (f, x) 的范数。注意

$$(f, x) = \|f\|\|x\|\cos\theta,$$

θ是向量 f 与向量 x 的夹角，显然当 $\theta = 0$ 时，$f(x) = (f, x)$ 达到最大值，所以我们有

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{2.2.19}$$

这个式子只用范数 $\|f\|$ 和 $\|x\|$，不用内积 (f, x)，因此用来定义线性赋范空间上线性泛函的范数。

现在讨论共轭算子。对 Euclid 空间的矩阵算子，$(Ax, f) = (x, A^*f)$，这里 A^* 是矩阵A的转置矩阵。(Ax, f) 用线性泛函术语来说就是 $f(Ax)$。一般地设X和 X_1 是线性赋范空间，A是将X映射到 X_1 的线性算子，f 是 X_1 上的线性泛函。又设 X^*，X_1^* 分别是X和 X_1 的共轭空间，则 $f \in X_1^*$，$(A^*f, x) = A^*f(x)$ 是X上的线性泛函，故 $A^*f \in X^*$，因此对一般线性赋范空间。A^* 是 X_1^* 到 X^* 的算子并且满足 $f(Ax) = A^*f(x)$，所以将 A^* 规

定成从 X_1^* 到 X^* 并且满足 $f(Ax) = A^*f(x)$，的算子，把 A^* 叫作 A 的共轭算子。

对二维 Euclid 空间，$f(x) = 0$ 相当于 $(f, x) = 0$，因此叫作 f 与 x 正交，$f(x) = 0$ 相当于过原点的平面，f 相当于平面的法线 n，$f(x) = 0$ 相当于平面 $n \cdot x = 0$。在 n 维 Euclid 空间中，线性泛函的一般形式是 $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$；在 C 空间中、Riesz 给出线性泛函的一般形式是

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t),$$

过原点的"超平面"方程是 $\int_a^b x(t)dv(t) = 0$，这是一个包含 Stieltjes 积分的积分方程。$L^p[a, b]$ 上线性泛函的一般形式是

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt,$$

其中 $y(t) \in L^q$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p > 1$。

在 Euclid 空间中除 Bolzano-Weierstrass 定理之外，还有一个重要的特性，就是任何 Cauchy 序列(或称基本序列)都有极限，这也就是实数域的完备性。这个性质在数学分析中有重要的作用，现在我们将它推广到线性赋范空间。

定义 设 $\{x_n\}$ 是线性赋范空间 X 中的点列，若对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N 使当 $m, n > N$ 时，$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 序列或基本序列，若 X 中的任意基本序列都有极限，则空间 X 叫作完备的，完备的线性赋范空间叫作 Banach 空间。

线性赋范空间的研究由 Riesz 开始，然而一般的定义却是在 1920—1922 年由 Stefan Banach (1892—1945)，Hans Hahn (1879—1934)，Eduard Helley (1884—1943) 和 Nobert Wiener (1894—1964) 给出，这些人的工作有许多是重迭的，优先权问题很难弄清。但是要算 Banach 贡献最大，所以完备的线性赋范空间被命名为 Banach 空间。这些人情况各不相同：N. Wiener 是著名的神童，他提出线性赋范空间概念以后，没有继续作下去，失掉

了这块阵地，阵地被别人占领，但是他找到了新的阵地，成为控制论的奠基人之一. Helley 一生坎坷，他 1912 年就得到了 Hahn-Banach 定理和 Banach-Steinhaus 的共鸣定理，但是这两个定理都未以他的名字命名. 他在第一次世界大战中受重伤，在西伯利亚成了战俘. 战后回到奥地利，在大学中找不到职位，用业余时间进行研究，1938 年为逃避对犹太人的迫害，全家移居美国，不久就死在美国. Banach 第一次世界大战期间失学在家，在 Cracow 的公园里谈数学，被在公园里散步的数学教授 Steinhaus 发现，开始了他的研究工作. 1920 年以后，波兰数学学派异军突起，在拓扑和泛函分析上作出了重大贡献，在 Banach 和 Steinhaus 指导下，L'wow 成为波兰的数学中心之一，形成著名的 Banach 学派，对泛函分析的发展作出了杰出的贡献，特别是对 Banach 空间理论的形成作出了极其重要的贡献.

可以证明 $C[a,b]$, $L^p[a,b]$ 都是 Banach 空间，亦即是完备的赋范空间. 下面介绍 Banach 空间的几个主要定理.

定理 2.2.8 (Hahn-Banach 定理) 设 X_1 是线性赋范空间 X 的子空间，f 是定义在 X_1 上的有界线性泛函，则 f 可以延拓到整个 X 上保持范数不变，即存在定义在 X 上的有界线性泛函 F 满足

(1) 对 $x\in X_1$, $F(x)=f(x)$;

(2) $\|F\|=\|f\|_{X_1}$, 这里 $\|f\|_{X_1}$ 表示 f 作为 X_1 上有界线性泛函的范数.

Hahn-Banach 定理的证明可以在任何一本泛函分析教科书中找到，这里讨论定理的原型. 设 $\{g_k(x)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交系. 如所周知，$f(x)$ 的 Fourier 系数可以写成

$$f_k=\iint_\Omega f(x)g_k(x)dx,$$

Riesz 研究这个问题的反问题，即对给定的数列 $\{f_k\}$，在什么条件下存在函数 $f(x)\in L^2(\Omega)$，使 $\int_\Omega f(x)g_k(x)dx=f_k$. 这个问题叫作矩量问题，在几何上相当于在什么条件下，才能存在一个点以

给定的数列为该点的坐标. 由于 $\{g_k\}$ 是标准正交系,显然 f_k 必需满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < +\infty$. 若 $g(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k(x)$, 显然

$$\iint_{\Omega} f(x)g(x)dx=\sum_{k=1}^{n} f_k\lambda_k.$$

由于

$$\left|\iint_{\Omega} f(x)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|\|g\|,$$

设 $M=\|f\|$, 则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\lambda_k\right| \leqslant M\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g_k(x)\right\|.$$

$\sum_{k=1}^{n} f_k\lambda_k$ 是有限维空间上的线性泛函, Riesz 试图将这个不等式推广到无穷维空间,并且保持M不变,这就是 Hahn-Banach 定理的原型. Helley 第一次将这个定理用几何语言表示出来,因此 Helley 被叫作 Hahn-Banach 定理之父, Fredholm, Riesz, Hilbert, Helley 四人的工作被称为泛函分析发展的前四个里程碑. 下面叙述 Hahn-Banach 定理的两个重要的推论.

推论 2.2.1 设X是线性赋范空间,则对任一 $x_0\in X$, 只要 $x_0\neq 0$ 必存在X上的有界线性泛函 f 满足 $\|f\|=1$, $f(x_0)=\|x_0\|$.

推论 2.2.2 设 X_1 是线性赋范空间X的子空间, $x_0\in X$, 若 $\rho(x_0,X_1)=\inf\limits_{x\in X_1}\|x_0-x\|=\delta>0$, 则必存在$X$上的有界线性泛函 f 使 $\|f\|=\dfrac{1}{\delta}$, $f(x_0)=1$, 而对 $x\in X_1$, $f(x)=0$.

对 Euclid 空间推论 2.2.1 和推论 2.2.2 都是很简单的. 若 $x_0\neq 0$, 取 $f=\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, 显然 $\|f\|=1$, $f(x_0)=(f,x_0)=\|x_0\|$, 这就是推论 2.2.1. 设 X_1 为过原点的平面, 若 $f(X_1)=0$, 显然 $f\perp X_1$. 设向量 f 与向量 x_0 的夹角为 θ,则

$$f(x_0)=(f,x_0)=\|f\|\|x_0\|\cos\theta=\|f\|\|x_0\|\frac{\delta}{\|x_0\|}=\|f\|\delta,$$

其中 δ 是从点 x_0 到子空间 X_1 的距离. 若 $f(x_0)=1$, 即 $\|f\|\delta=1$, 从而 $\|f\|=\frac{1}{\delta}$, 这就是推论 2.2.2.

由推论 2.2.1 可知: (1) 对任何线性赋范空间 $X\neq\{0\}$, 必存在足够多的线性泛函, 事实上在任一有限维子空间上定义的线性泛函都可以开拓到整个空间上; (2) 如果对于 X 上的一切线性泛函 f 都有 $f(x_0)=0$, 则 $x_0=0$. 事实上由推论 (1) 知, 只要 $x_0\neq 0$, 必有 X 上的非零线性泛函 f 使 $f(x_0)\neq 0$, 从而若对任意 f 都有 $f(x_0)=0$, 则 $x_0=0$. 这个结论的几何意义是若 x_0 在任意方向上的投影都为 0, 则 $x_0=0$. 因此为判断 $x_0\in X$ 是否等于零元,只要判断 X 上的一切线性泛函 f 对 x_0 的作用得到的值 $f(x_0)$ 是否都等于零.

利用推论 2.2.2 可知: (1) $x_0\in\overline{X}_1$ 的充要条件是对 X 上任一满足 $f(x)=0$ $(x\in X_1)$ 的线性泛函 f, 必有 $f(x_0)=0$. 必要性是显然的, 充分性可由推论 2.2.2 得出. 因此为了判别 x_0 是否属于 $\overline{X}_1$, 只要判别 X 上一切满足 $f(x)=0$ $(x\in X_1)$ 的有界线性泛函, 对 x_0 作用是否等于零; (2) 设 $x_0\in X$, X_1 是 X 的一个子集, 则 x_0 可以用 X_1 中元素的线性组合以任意精度逼近的充要条件是对 X 上任一线性泛函 f 当 $f(x)=0$ $(x\in X_1)$ 时,必有 $f(x_0)=0$. 其实,若 X_2 是由 X_1 中元素所张成的线性子空间, 则 x_0 可以用形如 $\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(x_k\in X_1,\ c_k$ 为常数, $k=1,2,\cdots,n)$ 的元素以任意的精确度逼近的充要条件是 $x_0\in\overline{X}_2$. 这样由 (1) 就可推出 (2). (2) 为我们提供了一个判别 $x_0\in X$ 能否用 X_1 中元素的线性组合以任意的精确度逼近的判别法.

推论 2.2.1, 推论 2.2.2 以及有关的结果还告诉我们,为了研究 X 中元素 x_0 是否具有某种属性, 可将它转化为 X 上的线性泛函是否具有相应的属性的研究, 这种方法在分析中是常用的. 综上所述,已经可以说明, Hahn-Banach 定理是一个非常有用的工具. 作为 Hahn-Banach 定理的应用可以证明下面的定理.

定理 2.2.9 设K是紧算子，$y\in X$ 是给定的元素，$\lambda\neq 0$，则$(I-\lambda K)x=y$ 有解的充要条件是y与算子 $I-\lambda K^*$ 的零空间 n^* 正交，K^* 是K的共轭算子。

证明 必要性．设 $(I-\lambda K)x=y$ 有解 x，则对任一$f\in n^*$ 有

$$f(y)=f(x-\lambda Kx)=f(x)-f(\lambda Kx)=f(x)-(\lambda K^*f)(x)$$
$$=(f-\lambda K^*f)(x)=0,$$

即y与 n^* 中任一元正交，或者说 $y\perp n^*$.

充分性．设 $y\perp n^*$，$y\neq 0$，方程 $(I-\lambda K)x=y$ 有解等价于 $y\in I-\lambda K$ 的值域 R，故只要证明y属于R即可．现设$y\bar{\in} R$，因R是X的闭子空间，由 Hahn Banach 定理的推论 2.2.2，有X上的有界线性泛函 f_0 使 $f_0(y)=\|y\|$，$\|f_0\|=1$，对任何 $z\in R$，$f_0(z)=0$。$f_0(z)=0$ $(z\in R)$ 表明对一切$x\in X$有$f_0(x-\lambda Kx)=0$，即对一切 $x\in X$，有 $(f_0-\lambda K^*f_0)(x)=0$，故 $f_0-\lambda K^*f_0=0$，即 $f_0\in n^*$．但已知 $y\in n^*$ 正交，故 $f_0(y)=0$，与 $f_0(y)=\|y\|\neq 0$ 矛盾，这个矛盾说明 $y\in R$，即方程 $(I-\lambda K)x=y$ 有解。证毕．

至此我们已经对紧算子建立了 Fredholm 理论，这里紧算子是个关键的条件．前面已经说过，有界集是否紧致是有限维空间和无限维空间的分水岭，为了要将有限维空间的结果推广到无穷维空间常常要附加某些和紧性有关的条件，因此紧性是十分要紧的条件．

由 Hahn-Banach 定理可知，线性赋范空间有足够多的线性泛函，但是线性赋范空间未必能定义内积．为了讨论在线性赋范空间中定义内积的条件，先考虑在有限维空间中如何用长度也就是用范数定义内积．由余弦定理

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x,y),$$

从而

$$(x,y)=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2}{2},$$

同时也可以证明

$$(x,y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2},$$

从这两个式子中消去 (x,y) 就有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,$$

这个等式叫作 Jordan-Neumann 恒等式，其几何意义是平行四边形的对角线的平方和等于各边的平方和. 可以证明下述的定理:

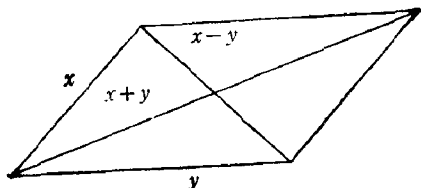


图 2.2.2

定理 2.2.10 线性赋范空间可以定义内积的充要条件是对空间中的任意元素 x 和 y 都有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

这本是平面几何的结果，译成泛函分析的语言就是泛函分析中的定理，这给我们一个启示：我们可以按平面几何的结果思考、提出命题，用泛函分析的术语改写和证明，对于和紧性无关的定理，这种作法常常是有效的.

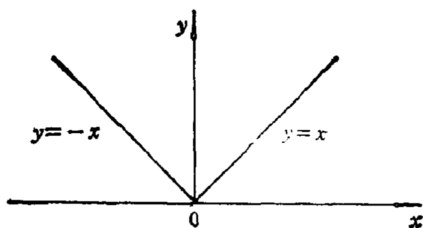


图 2.2.3

下面我们证明，$C(\Omega)$ 不是内积空间. 取 $\Omega=[-1,1]$ 令

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

显然 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都是 $[-1,1]$ 上的连续函数,容易验证 $|f_1(x)|$，$|f_2(x)|$，$|f_1(x)+f_2(x)|$，$|f_1(x)-f_2(x)|$ 的最大值都是 1，即

$\|f_1\| = \|f_2\| = \|f_1 + f_2\| = \|f_1 - f_2\| = 1$，Jordan-Neumann 恒等式显然不成立．因此 $C[-1,1]$ 不能定义内积，容易相信对空间 $C^k(\Omega)$ 也不能定义内积．

由于线性赋范空间不能定义内积，线性泛函的作用格外重要．线性泛函之于线性赋范空间，犹如坐标之于几何．对几何引进坐标，可以将几何语言译成代数语言，扩大了几何的研究范围，给几何研究提供了新的武器，能解决几何方法所不能解决的问题．由于坐标是向量在坐标轴上的投影，坐标就是线性泛函，因此线性泛函相当于线性赋范空间的坐标，可以利用线性泛函将线性赋范空间的研究转化为共轭空间的研究，这是泛函分析中一个重要的研究方法．

§2.3 Hilbert 空间

从前一节中看到，对一般的 Banach 空间不能定义内积，因此 Banach 空间的几何是没有角度的几何．没有角度就没有正交，不能从平面外一点向平面做垂线，一点到一个子空间的最短距离也不能得到．没有内积、没有角度的几何显然是种不完善的几何，需要在空间中引进内积．

二十年代 Göttingen 大学人才荟萃，第一次大战后，Göttingen 的数学活动围绕着 Courant, Landau 和 Noether 广泛展开．同时 Marx Born 周围云集了一批物理学家，本世纪 20 年代是 Göttingen 物理学的全盛时代．由于 Landau 的努力，Göttingen 成了数论研究的中心．战后最富有成果的研究圈子之一以 Noether 为中心展开．公理化方法在她手中不仅是澄清逻辑和深化基础的手段，而且是具体进行数学研究的有力武器．她的学生包括荷兰的 van der Waerden、奥地利的 Artin、苏联的 Alexandrof．以 Noether 为首的抽象代数学派使整个数学界为之一震，在他们的影响下导致 Bourbaki 学派的产生，使法国数学获得新生．Noether 的论文只有 40 多篇，但所产

生的影响是巨大的. van der Waerden 在 Noether 和 Artin 讲义的基础上，整理出《近世代数》一书，这部书曾将大批数学家引入新的领域，而且为以后代数学书的写法树立了榜样. 它传播了 Noether 的思想，从根本上改变了整个代数学的面貌. Noether 不仅在抽象代数方面做了奠基性工作，而且对拓扑学的发展有很大影响. 正是在她的影响下，苏联的 Alexandrof，瑞士的 Hopf 把同调群的概念引入拓扑学. 现代代数学与现代拓扑学的密切关系正是当年 Noether 指出的光明大道.

Courant 象 Klein 一样继承了 Göttingen 大学的数学物理传统. 他的工作的真正核心就是有意识地继承和发展 Riemann, Klein 和 Hilbert 的思想，坚定不移地证明所有数学分枝的基本统一性.

本世纪二十年代是物理学的美好年代，在以 Cambridge, Copenhagen 和 Göttingen 为顶点的三角形内，理论研究以魔术般的速度突飞猛进. 1921 年 21 岁的 Heisenberg 从 München 来到 Göttingen，1924 年，Hilbert, Courant 的书出版，这本书为量子力学提供了有力工具. Hilbert 的理论甚至还用了谱这个名词，但当时只是一个纯粹数学想法，没想到它竟会在光谱得到应用.

Hilbert 的兴趣主要有两个方面，一个是数学基础，Hilbert 建议将数学化为形式系统. 这个形式系统的对象(数学定理及其证明)，通过逻辑语言表达为语句. Hilbert 要求从一个公理体系出发推出一切真命题的集合，并且要求发展一种方法，使得按着这种方法，对任何命题，都能经过有限步判定其真伪. Hilbert 为此做了巨大努力，也取得了许多成果，因此开创了数学基础的形式主义学派. 但是后来 Gödel 证明把整个数学统一成一个公理体系是不可能的. Hilbert 的兴趣另一方面是物理学，他对包括量子力学在内的物理学有极大兴趣. 但任何大家都是有局限性的，Hilbert 在物理学方面的成就很不理想，而且这时他在数学基础方面的观点受到强有力的对抗，这方面的代表人物是创立直觉主义 Brouwer，其中还有 Hilbert 最有才华的学生之一 Weyl. 1924

年 21 岁的 Neumann 来到 Göttingen，他和 Hilbert 一起研究量子力学的数学基础，这使 Neumann 更进一步深入量子力学，创立了量子力学的数学基础. 在这项工作中，Neumann 提出了研究 Hilbert 空间的公理化方法.

线性赋范空间是赋有长度的线性空间，但从几何角度看，只有长度是不够的，还需有角度. 在 Euclid 空间中两个向量 x 和 y 的内积为

$$(x,y)=\|x\|\|y\|\cos\theta, \tag{2.3.1}$$

其中 $\|x\|$ 和 $\|y\|$ 是向量 x 和 y 的长度，θ 是向量 x 和向量 y 的夹角，由于

$$\cos\theta=\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|},$$

因此，只要有了长度和内积就可以定义角度，为了在线性赋范空间中定义角度，我们引进内积概念.

如果对线性空间 X 中任何一对元素 x 和 y 定义一个实数 (x,y) 使其满足

$$\begin{aligned}&(1)\ (x,x)\geqslant 0,\ 且\ (x,x)=0\ 当且仅当\ x=0;\\&(2)\ (x,y)=(y,x);\\&(3)\ (x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y);\\&(4)\ (\alpha x,y)=\alpha(x,y),\ \alpha\ 为任意实数,\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

则称 (x,y) 为 x 和 y 的内积，并把 X 叫作内积空间. (2.3.2) 列出的四条叫作内积公理.

内积公理是从 (2.3.1) 抽象出来的，在 (2.3.1) 中令 $y=x$，则 x 和 y 的夹角 θ 为零，因此 $(x,x)=\|x\|^2$，也就是 x 与 x 的内积是 x 的长度的平方，因此满足 (2.3.2) 的第一条，第二条显然成立，(2.3.2) 的第三条在几何上表示两个向量之和在一个给定方向上的投影等于两个向量分别在给定方向上投影的和. 因此第三条成立. 至于第四条是显然的. (2.3.2) 是从 (2.3.1) 抽象出来的，但抛弃了 (2.3.1) 的具体形式，使它包括更多内容. 还应指出

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

满足范数公理(2.2.1)，因此内积空间必然是线性赋范空间，下面给出内积空间的例子。

例 2.3.1 在 n 维 Euclid 空间中定义内积

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

容易验证这样定义的内积满足公理(2.3.2)，因此 n 维 Euclid 空间 E^n 是内积空间。

例 2.3.2 考虑在 Ω 上所有 Lebesque 平方可积函数，引进内积

$$(f,g)=\int_\Omega fg d\Omega, \tag{2.3.3}$$

它显然满足内积公理(2.3.2)，因此是一个内积空间，这个空间记以 $L^2(\Omega)$。注意 $L^2(\Omega)$ 既是赋范空间，又是内积空间。

一般地说，线性赋范空间未必是内积空间，线性赋范空间能定义内积空间的充要条件由定理 2.2.10 给出。

现在我们已经知道四类空间：(1) 线性空间；(2) 线性赋范空间；(3) 内积空间；(4) Euclid 空间。(1) 是引进元素的加法、元素与数的乘法；(2) 在线性空间中引进长度，也就是范数，从而引进距离；(3) 在线性空间中引进内积，也就引进了角度，因为一个元素与自己的内积就是范数平方，因此内积空间一定是赋范线性空间；(4) Euclid 空间是有限维内积空间，这四者的关系是一个包含一个，即 (1)⊃(2)⊃(3)⊃(4)。

线性空间对代数运算是封闭的，引进了范数就引进了距离，有了距离就有了极限。在数学分析中有个极限存在的 Cauchy 判别法，它的内容是实数序列 $\{x_n\}$ 在实数范围内有极限的充要条件是

$$\lim_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=0. \tag{2.3.4}$$

这里实数的条件不能去掉，将实数改为有理数就不对了。例如设 x_n 代表 $\sqrt{2}$ 的无穷小数表示中的前 n 位，即 $x_1=1$，$x_2=1.4$，$x_3=1.41$，…等等，它显然满足(2.3.4)，但在有理数域内 x_n 没有极限。由于实数域上 Cauchy 判别法成立，因此实数域对极限运算是完备的。赋范空间和内积空间也分为完备和不完备两类，

Cauchy 判别法不成立的这类空间叫做不完备的，下面我们给出完备空间的定义.

若线性赋范空间中的点列$\{x_n\}$满足条件 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$，则称 $\{x_n\}$ 是一个基本序列. 如果在X中任何基本序列都有极限，也就是说对X中任何基本序列$\{x_n\}$，在X中能找到一个 x_0，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$，则称$X$是完备的. 完备的线性赋范空间叫 Banach 空间，完备的内积空间叫 Hilbert 空间. 只有完备的空间才有名字，可见完备的重要性. 下面我们给出 Banach 空间和 Hilbert 空间的例子.

例 2.3.3 $C(\Omega)$ 是 Banach 空间，这是因为与 $C(\Omega)$ 的范数相对应的收敛是一致收敛. 按照一致收敛的判别法，任何基本序列都一致收敛，而连续函数一致收敛的极限仍是连续函数.

例 2.3.4 $L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 这就是说 $L^2(\Omega)$ 中的任何基本序列在 $L^2(\Omega)$ 中有极限，这个结果的证明可以参看吉田耕作的《泛函分析》.

例 2.3.5 根据与例 1 类似的道理，$C^k(\Omega)$ 是 Banach 空间.

例 2.3.6 如果我们在集合 $C^k(\Omega)$ 中引入内积(2.3.3)，它是一个内积空间却不是 Hilbert 空间. 例如，设 $f(x)$ 是图 2.3.1 所示的折线函数. 容易构造一串连续可微函数 $f_n(x)$，使

$$\iint\limits_{\Omega}(f_n(x)-f(x))^2dx\to 0,\ (n\to\infty),$$

但 $f(x)$ 显然不是可微函数，故此空间不完备.

Hilbert 空间是最接近 Euclid 空间的无穷维空间. 在 Hilbert 空间中能定义角度，当然可以定义正交. 设 x, y 是 Hilbert 空间X中的任意元素，如果 $(x,y)=0$，便把x和y叫做正交的，记以 $x\perp y$. 若M是X的子集，所有与M正交的向量构成一个线性空间，这个线性空间叫做M的正交补空间，记以 $M^\perp$. 以三维欧氏空间为例，若M是形如 $(\lambda,0,0)$ 的向量的集合，那么 $M^\perp$ 便是形如 $(0,\mu,\nu)$ 的向量集合.

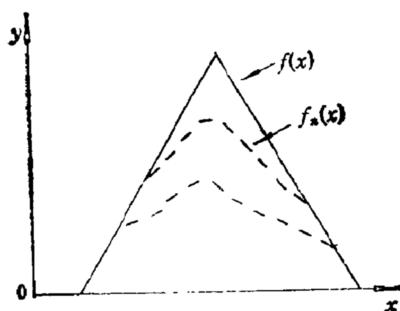


图 2.3.1

在三维 Euclid 空间中线性泛函的一般形式就是 $ax+by+cz$，如果 f 表示向量 (a,b,c)，X 表示向量 (x,y,z)，则 $ax+by+cz$ 可以写成 f 和 X 的内积. 由于

$$|ax+by+cz| \leqslant (a^2+b^2+c^2)^{1/2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2},$$

并且当

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ z=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

时，$ax+by+cz=(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$，因此 $|ax+by+cz|$ 在单位球上的最大值为 $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$，线性泛函 $ax+by+cz$ 的范数就是向量 f 的范数. 这个结果能推广到 Hilbert 空间，这就是 Riesz 表现定理.

定理 2.3.1 设 H 是 Hilbert 空间，$F(x)$ 是 H 上的有界线性泛函，则存在唯一的 H 中的元素 f，使

$$F(x)=(f,x), \tag{2.3.5}$$

并且 $\|F\|=\|f\|$.

(2.3.5) 在几何上可以这样解释，$F(x)=0$ 是过原点的平面，f 是平面上的法向量，x 是平面上的任意向量，我们可以以此为根据去求 f. 一般地 $F(x)=0$ 的 x 在 H 中构成一个线性子空间，这个线性子空间我们记以 V. 设 w 是 H 中不在 V 内的元素. 用几何的话来说，就是 w 是平面 V 外的一点. 设 w_0 是 w 在平面 V

上的投影，那么 $\dfrac{w-w_0}{\|w-w_0\|}$ 便是单位法向量 $n_0=\left(\dfrac{a}{r},\ \dfrac{b}{r},\ \dfrac{c}{r}\right)$

其中 $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 在三维 Euclid 空间中 $F(x)=ax+by+cz$，因此 $F(n_0)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\|f\|$. 所以对任意给定的线性泛函 $F(x)$，我们可以认为 $f=F(n_0)n_0$，这里 $n_0=\dfrac{w-w_0}{\|w-w_0\|}$. 将这段话翻译成泛函分析的语言，就得到 Riesz 表现定理的证明. 注意这里假定 w_0 是 w 在平面上的投影，在 Euclid 空间中 w_0 是肯定存在的，对 Hilbert 空间这个结果也是对的.

定理 2.3.2 设M是 Hilbert 空间H的一个闭子空间，w是H中不属于M的元素，则有而且只有一个H中的元 w_0，使 $w-w_0$ 与H正交。

这个定理是过平面外一点能作而且只能作一条这个平面的垂线在 Hilbert 空间的推广. 必须指出这个定理对一般的内积空间未必成立. 因为一般的内积空间未必完备. 以初等几何为例，如果只限于考虑坐标为有理数的点，那么平面就象个筛子，有许多孔眼，$(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 就是一个. 如果垂足坐标刚好是无理数，那么垂足就不存在了. 这是我们必须考虑完备空间的一个原因.

定理 2.3.3（直交分解） 设M是 Hilbert 空间的闭子空间，则对任意的 $x\in H$ 可作下列唯一的直交分解，$x=x_0+y$，其中 $x_0\in M$，$y\in M^{\perp}$.

Schmidt 对 l_2 空间首先证明了这个结果，一般情况下的结果则由 Neumann 给出.

下面介绍一个以后要用到的很重要的概念. 由 Riesz 表现定理对每个线性泛函 $f(x)$，有且仅有一个 $f\in X$，使 $f(x)=(f,x)$. 于是线性泛函 f 与X中的元素一一对应，因此X上的线性泛函也构成一个线性空间，这个空间与原空间在代数上同构. 我们定义 $\|f(x)\|=\sup\limits_{x\in X}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$，显然当 $x=f$ 时最大，所以线性泛函的范数等于向量 f 的范数，这样两个空间在几何上或者说在拓扑上同

构．线性泛函构成的空间 X^* 叫作 X 的对偶空间或共轭空间．对 Hilbert 空间而言 X 与 X^* 是同构的． 我们再研究线性泛函的值 $F(x)=(f, x)$，在 Euclid 空间中 $(f,x)=\|f\|\|x\|\cos\theta$，于是 $\frac{(f,x)}{\|f\|}=\|x\|\cos\theta$，因此 $\frac{(f,x)}{\|f\|}$ 相当于 x 在 f 上的投影． 从这个意义上说，x 的线性泛函相当于 x 的影子，线性泛函的值相当于影子的长度，X 的对偶空间相当于 x 的影子构成的空间．正如影子是人的忠实伴侣一样，这个空间叫对偶空间是贴切的．一个人的形象可以用它的影子来刻划，所以我们可以用线性泛函来研究一个空间，Hahn-Banach 定理表明这种刻划是可能的，由于线性泛函的值域是数域，定义域是抽象事物，可以用数域的性质来刻划原来的事物． 注意 Euclid 空间上的坐标是 Euclid 空间上的线性泛函，因此对偶空间方法相当于坐标方法的推广．

分析中至关重要的概念是收敛概念．容易相信当一个人靠近另一个人时，他们的影子也彼此靠近，类似地，对 $x_n\in H$，$x_0\in H$，$f\in H^*$，当 $x_n\to x_0$ 时，则 $f(x_n)\to f(x_0)$．反过来当两个人的影子靠近时，两个人未必靠近．但如果在各种投影面上影子都靠近，那么两个人就真的靠近了． 在 Euclid 空间中定义收敛有两种方法，一种是当 $m\to\infty$ 时，x_m 与 x_0 的距离趋于零，记以

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m-x_0\|=0,$$

这种收敛叫作按范数收敛． 另一种定义收敛的方法是按坐标收敛，设 $x^m=(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^{(m)})$，$x_0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，则定义 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x_0$ 为

$$\lim_{m\to\infty}x_i^m=x_i^0,\ i=1, 2,\cdots, n. \tag{2.3.6}$$

设 $e_1, e_2,\cdots, e_n$ 是 n 维空间 E^n 中的单位正交基，由于

$$x_i^m=(x_m,e_i),\ m=1, 2,\cdots,\ i=1, 2,\cdots,n.$$

$x_i^0=(x_0, e_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$，因此 (2.3.6) 也可写成

$$\lim_{m\to\infty}(x_m,e_i)=(x_0,e_i)\ \ i=1,2,\cdots,n. \tag{2.3.7}$$

由于 Euclid 空间中的任何向量都可写成 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性

组合，因此由 (2.3.7) 可知，对 Euclid 空间中任意向量 f 都有

$$\lim_{m\to\infty}(x_m, f) = (x_0, f). \tag{2.3.8}$$

n 维 Euclid 空间中的任意线性泛函（即齐次线性函数）都可以写成 (x, f) 的形式．因此用泛函分析的术语来说，可以把 $x_n \to x_0$ 定义成对 n 维 Euclid 空间中任意线性泛函 $f(x)$ 都有 (2.3.8) 成立．显然这种收敛与按范数收敛等价，也就是说按范数收敛等价于按任意方向上的投影收敛．当然对有限维空间而言，对任意方向上的投影可换成按坐标轴方向上的投影，只要按各坐标轴方向的投影收敛就可以了．

类似地我们在 $L^2[0, 1]$ 中也可以定义两种收敛一种是按范数收敛，即

$$\|x_m(t) - x(t)\| \to 0,\ m \to \infty.$$

一种是对 $L^2[0,1]$ 上的线性泛函 f

$$\lim_{m\to\infty}(f, x_m(t)) = (f, x(t)),$$

或

$$\lim_{m\to\infty}(f, x_m(t) - x(t)) = 0.$$

和 Euclid 空间不同，这两种收敛是不等价的，第一种是

$$\int_0^1 (x_m(t) - x(t))^2 dt \to 0\ \ m \to \infty,$$

第二种是对任意在 $[0, 1]$ 上的平方可积函数 f 都有

$$\int_0^1 f(t)(x_m(t) - x(t))dt \to 0$$

当 $m \to \infty$ 时，根据 Schwarz 不等式，有

$$\left|\int_0^1 f(x_m - x)dt\right| \leqslant \left[\int_0^1 (x_m - x)^2 dt\right]^{1/2} \left[\int_0^1 f^2 dt\right]^{1/2},$$

所以由第一种收敛能推出第二种收敛，反之则未必成立．例如，取 $x_m(t) = \sin m\pi t$，$\int_0^1 f(t)x_m(t)dt$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 系数，若 $\{x_m(t)\}$ 看成直角坐标系，则 (f, x_m) 可以看成 f 的第 m 个坐标．与初等几何的结果类比容易相信，$\sum_{m=1}^{\infty}(f,\ x_m)^2 \leqslant \|f\|^2$，从而

$\sum_{m=1}^{\infty}(f,x_m)^2$ 收敛因此 $\lim_{m\to\infty}(f,x_m)=0$. 但是由下式

$$\int_0^1(\sin m\pi t-\sin n\pi t)^2dt=\int_0^1\sin^2 m\pi t dt+\int_0^1\sin^2 n\pi t dt$$

$$-2\int_0^1\sin m\pi t\sin n\pi t dt=1$$

可知，$\{x_m(t)\}$ 不是基本列，因此不能收敛. 这说明按第二种意义收敛的序列按第一种意未必收敛. 既然按范数收敛一定能推出第二种意义下的收敛，反之不真. 所以我们把按范数收敛叫做强收敛，第二种意义的收敛叫弱收敛，下面给出弱收敛的定义.

定义 如果对 Hilbert 空间 H 中点列 $\{x_n\}$ 及点 x_0，对 H 上的任一线性泛函 f 都有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0. 记作 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ (弱)或 $w\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，或 $x_n\to x_0$ (弱).

相对于弱收敛而言，按范数收敛叫作强收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0,$$

记作 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ (强)或 $s\text{-}\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$ (强)

根据前面的叙述容易证明下述定理.

定理 2.3.4 若 x_n 强收敛于 x_0，则 x_n 必弱收敛于 x_0.

我们已经知道 Bolzano-Weierstrass 的聚点原则成立与否是有限维线性赋范空间与无限维线性赋范空间的分水岭，这个原理是很有用的，是证明收敛性的强有力武器，它的不成立是很遗憾的事情. 但是前面指出，对任意 f，$\int_0^1 f(t)\sin n\pi t dt=f_n\to 0$，从而 $\sin n\pi t$ 当 $n\to\infty$ 时弱收敛于 0. 这个事实启发我们，对某些无穷维空间按弱收敛意义，Bolzano-Weierstrass 定理可能仍然成立，事实上我们可以证明.

定理 2.3.5 如果 Hilbert 空间 H 的点列 $\{x_n\}$，$\{\|x_n\|\}$ 为有界序列时，则 $\{x_n\}$ 必然有弱收敛的子列.

证明 不失一般性假设 $\|x_n\|\leqslant 1$，由于 H 中形如 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$

(α_i 是有理数，m 是任意正整数)的元全体是可数的，所以可把它排成元素列 $\{y_m\}$。设M是这种元素全体再添上它们的按范数意义收敛的所有极限点后的集合，注意这些极限点的极限点也属于这个集合，因此M是H的闭子空间，并且 $\{y_m\}$ 在M内稠密。

由于 $|(x_n, y_m)| \leqslant \|x_n\|\|y_m\|$，对每个 y_m 数列 $\{(x_n, y_m)\}$ $n=1, 2, \cdots$，是有界的，因此可凭对角线方法选出适当的子列 $\{x_{n'}\}$，使得对一切 y_m，$\lim\limits_{n'\to\infty}(x_{n'}, y_m)$ 存在。

事实上，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，从有界数列 $\{(x_n, y_1)\}_{n=1,2,\cdots}$ 中可选出收敛子列 (x_{11}, y_1)，(x_{21}, y_1)，(x_{31}, y_1)，$\cdots$. 同样，从有界数列 (x_{11}, y_2)，(x_{21}, y_2)，(x_{31}, y_2)，$\cdots$ 中选出收敛子列 (x_{12}, y_2)，(x_{22}, y_2)，(x_{32}, y_2)，$\cdots$，依次从有界数列 $(x_{1,n-1}, y_n)$，$(x_{2,n-1}, y_n)$，$(x_{3,n-1}, y_n)$，$\cdots$ 中选出收敛子列 $(x_{1,n}, y_n)$ $(x_{2,n}, y_n)$，$(x_{3,n}, y_n)$，$\cdots$，一直继续下去得到

$$
\begin{array}{l}
(x_{11}, y_1), (x_{21}, y_1), (x_{31}, y_1), \cdots, \\
(x_{12}, y_2), (x_{22}, y_2), (x_{32}, y_2), \cdots, \\
\qquad\cdots\cdots, \\
(x_{1,n}, y_n), (x_{2,n}, y_n), (x_{3,n}, y_n), \cdots, \\
\qquad\cdots\cdots.
\end{array}
$$

数列 $\{x_{l,n}\}_{l=1,2,\cdots}$ 是数列 $\{x_{l,n-1}\}_{l=1,2,\cdots}$ 的子列。从而可知，当 $i < n$ 时，$\{(x_{l,n}, y_i)\}$ 收敛。然后取对角线上的元素 $x_n' = x_{nn}$，则 $\{x_{n'}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，并且对一切 m，$(x_{1'}, y_m)$，$(x_{2'}, y_m)$，$(x_{3'}, y_m)$，$\cdots$，收敛。

由于 $\{y_m\}$ 在M内按范数意义稠密，故对于任意的 $y \in M$ 及任意的 $\varepsilon > 0$，存在 y_{m_0} 使 $\|y - y_{m_0}\| < \varepsilon$，因此有，

$$
\begin{aligned}
|(x_{n'}, y) - (x_{k'}, y)| &= |(x_{n'}, y) - (x_{n'}, y_{m_0}) \\
&\quad + (x_{n'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y_{m_0}) + (x_{k'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y)|, \\
&\leqslant \|x_{n'}\|\|y - y_{m_0}\| + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})| + \|x_{k'}\|\|y_{m_0} \\
&\quad - y\| \leqslant \varepsilon + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})| + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

当 n'、$k' \to \infty$ 时，$|(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})| \to 0$，从而数列 $\{(x_{n'}, y)\}$

收敛. 对任意 $z\in H$, 由定理 2.3.4 知,存在 $z_1\in M$, $z_2\in M^{\perp}$, 使 $z=z_1+z_2$. 由于 $x_{n'}\in M$, 故

$$(x_{n'},z)=(x_{n'},z_1+z_2)=(x_{n'},z_1).$$

由于 $z_1\in M$, 故 $(x_{n'},z)$ 也收敛. 定义 $f(z)=\lim\limits_{n'\to\infty}(z,x_{n'})$ 由于 $|(z,\ x_{n'})|\leqslant\|z\|\|x_{n'}\|$, 可以验证 $f(z)$ 是有界线性泛函. 由 Riesz 表现定理可知,存在 $x_0\in H$, 使 $f(z)=(z,x_0)$, 从而对任取 $z\in H$, $\lim\limits_{n'\to\infty}(x_{n'},z)=(x_0,z)$, 也就是 $x_{n'}\xrightarrow{弱}x_0$, 定理证毕.

定理 2.3.5 可以简单的概括为: Hilbert 空间中有界集弱紧致. 这个定理突出了弱的意义,我们再三强调,有界集紧致这一性质的重要性,强调它是分析的基石,遗憾的是在无穷维空间中这个性质不再成立. 定理 2.2.3 表明,这个性质是否成立是有穷维空间与无穷维空间的分水岭. 正因为对无穷维空间有界集不再紧致,许多对有限维空间成立的结果对无限维空间不再成立, 增加了研究无限维空间的困难. 无穷维空间中有界集不紧致, 但是我们把收敛换为弱收敛. 定理 2.3.5 告诉我们, Hilbert 空间中有界集弱紧致,这样 Bolzano-Weierstrass 定理在弱的意义下被恢复起来. 在弱拓扑意义下的 Hilbert 空间不是有限维空间,它比有限维空间广泛, 但是相似于有限维空间, 而且具有许多有限维空间的性质.

这个定理启发我们发展算子方程理论有两条道路: (1) 给算子附加条件,如紧算子、正定算子、凸算子. (2) 考虑一般算子,但采取弱拓扑,考虑弱形式的算子方程、在弱形式的意义下同样可以建立美好的理论. 弱收敛不仅有美好的性质, 还有深刻的物理意义,这在 § 1.4 中已阐述过,即弱收敛相当于平均收敛. 定理 2.3.4 表明若 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0, 则 $\{x_n\}$ 必弱收敛于 x_0, 反过来若 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0, $\{x_n\}$ 未必强收敛于 x_0, 下面的定理表明,在一定条件下由弱收敛可以推出强收敛.

定理 2.3.6 如果 Hilbert 空间 H 的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x_0\in$

H，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_0\|$，则 $\{x_n\}$ 也强收敛于 x_0.

证明 $\|x_n-x_0\|^2=(x_n-x_0,x_n-x_0)=\|x_n\|^2-(x_n,x_0)-(x_0,x_n)+\|x_0\|^2$，由于 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0，当 $n\to\infty$时，$(x_n,x_0)\to\|x_0\|^2$，从而 $\|x_n-x_0\|^2\to 0$，亦即 $\{x_n\}$ 强收敛于 x_0.

弱收敛也有自己的缺陷. 二维空间中正方形的四个顶点是 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，n 维空间中 n 维立方体的 2^n 个顶点是 $(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),\cdots,(1,1,\cdots,1)$. 但在由标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 张成的 Hilbert 空间中虽有点 $(1,0,0,\cdots),(0,1,0,\cdots),\cdots\cdots$等顶点，却没有 $(1,1,1,\cdots)$ 这个点，形象的说天塌了一角，需要找一块石头将天支起. 需要补充一个函数，使它的 Fourier 系数全为 1. 这个函数不满足 Parseval 等式，因此它不是普通的函数，而是一个新的函数，它与普通函数的关系就象无理数与有理数、$\sqrt{-1}$ 与实数的关系一样. 在第三章中我们将详细讨论这个问题.

坐标是用一组数刻划向量，坐标的功用已为大家熟悉，解析几何就是范例. 尽管在有限维空间中按坐标收敛与按范数收敛等价，解析几何仍为研究问题提供了锋利的武器. 弱拓扑用线性泛函刻划元素，也是用一系列的数来刻划元素，因此线性泛函相当于广义坐标，弱收敛相当于按坐标收敛，把对抽象元素的研究化为对一组数的研究，后者的性质显然比前者好. 在这个意义上说，弱收敛的作用类似于解析几何对 Euclid 几何的作用.

§2.4 正定算子方程

这一节要将第一章中的 Ritz 法推广到更一般的算子方程. 第一个问题是给定一个算子方程 $Au=f$ 能否找到一个泛函使它的 Euler 方程为 $Au=f$. 我们的经验是用有限维空间猜无限维空间，用线性代数方程猜线性算子方程. 首先考虑代数方程 $ax=b$. 容易看出，令 $F(x)=ax^2-2bx$，则有 $F'(x)=2ax-2b$，

$F'(x)=0 \Rightarrow ax=b$。为了使 $F(x)$ 取极小，必须二阶导数大于 0，即 $a>0$。

考虑代数方程组

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
&\cdots\cdots\\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n,
\end{aligned}
$$

事实上，先考虑二维问题

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_1}=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\quad \frac{\partial F^*}{\partial x_2}=a_{21}x_1+a_{22}x_2.$$

由 Green 公式可知对单连通域存在 F^* 的充要条件为 $a_{12}=a_{21}$，当 $a_{12}=a_{21}$ 时，

$$
\begin{aligned}
F^*&=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)x_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)x_2\\
&=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j,
\end{aligned}
$$

故

$$F(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{2}b_ix_i.$$

类似对 n 维情形

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i,$$

$$a_{ij}=a_{ji},\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

为了使 F 取极小，考虑 F 的 Taylor 展开

$$F(x+h)=F(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j.$$

由于在极值点 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=0$，故 F 在极值点附近的值取决于

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j,$$

若 $h\neq 0$，$F(x+h)-F(x)>0$，则 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$ 为正定二次

型。

将以上讨论等式写成矩阵记号为：$AX=B$ 的原函数是 $F(X)=X^TAX-2(B,X)=(AX,X)-2(B,X)$，这里 A 是正定对称矩阵。所谓正定性是指存在 $C>0$，对任何 $X\neq 0$，$(AX,X)\geqslant C\|X\|^2$。对实矩阵而言，对称矩阵也可以叫作自共轭矩阵，它满足对任何 X、Y，$(AX,Y)=(X,AY)$。

根据上面这段分析，当 A 为正定算子时，我们猜想，方程 $Au=f$ 应是泛函

$$J(u)=(Au,u)-2(f,u)$$

的 Euler 方程。

设 H 是 Hilbert 空间，M 是 H 上的稠密集合，即对 H 中的任意元素 x 及任意正数 ε，都能在 M 中找到一个元素 y，使得 $\|x-y\|<\varepsilon$。设 A 是定义在 M 上的正定算子，即存在正数 $C>0$，使得对任何元素 $u\in M$，都有

$$(Au,u)\geqslant C\|u\|^2. \tag{2.4.1}$$

若对 M 中的任何元素 u 和 v 都有

$$(Au,v)=(u,Av),$$

则称算子 A 是对称的。

定理 2.4.1 设 A 是实 Hilbert 空间 H 上的对称正定算子，其定义域 $\mathscr{D}(A)$ 在 H 中稠密，若方程

$$Au=f,\ f\in H \tag{2.4.2}$$

有解 u_0，则 u_0 使泛函

$$J(u)=(Au,u)-2(f,u) \tag{2.4.3}$$

取极小值；反之，使 (2.4.3) 取极小值的元素必满足方程 (2.4.2)

证明 设 u_0 是 (2.4.2) 的解，对 H 中的任何元素 v，$v=u_0+\eta$，则

$$\begin{aligned}J(v)&=(A(u_0+\eta),u_0+\eta)-2(f,u_0+\eta)\\&=(Au_0,u_0)+(Au_0,\eta)+(A\eta,u_0)+(A\eta,\eta)\\&\quad-2(u_0,f)-2(\eta,f),\end{aligned}$$

由于 $(Au_0,\eta)=(u_0,A\eta)=(A\eta,u_0)$，$Au_0=f$，所以

$$J(v)=J(u_0)+(A\eta,\eta),$$

这里 $J(u_0)$ 是定数，$(A\eta,\ \eta)>0$ $(\eta\neq 0)$，所以只有当 $\eta=0$ 时 $J(v)$ 才能取极小值也就是说 u_0 使 (2.4.3) 式取极小值.

反之若 u_0 使 $J(u)$ 取极小值，设 $v=u_0+t\eta$，这里 η 是 $\mathscr{D}(A)$ 中的任意固定向量，则

$$\begin{aligned}J(v)&=(Au_0+tA\eta,u_0+t\eta)-2(u_0+t\eta,f)\\&=(Au_0,u_0)+t(Au_0,\eta)+t(A\eta,u_0)+t^2(A\eta,\eta)\\&\quad-2(u_0,f)-2t(\eta,f).\end{aligned}$$

记 $J(v)=F(t)$，则 $F'(t)=2t(A\eta,\ \eta)+2(Au_0-f,\ \eta)$. 令 $F'(0)=0$，则有 $(Au_0-f,\eta)=0$.

由于 $Au_0-f\in H$，$\mathscr{D}(A)$ 在H中稠密，故对任意正数 ε，都有 $\eta\in\mathscr{D}(A)$，使 $\|Au_0-f-\eta\|<\varepsilon$，由于

$$\begin{aligned}\|Au_0-f\|^2&=(Au_0-f,Au_0-f),\\&=(Au_0-f,\eta)+(Au_0-f,Au_0-f-\eta)\\&=(Au_0-f,Au_0-f-\eta),\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

所以$|(Au_0-f,Au_0-f-\eta)|\leqslant\|Au_0-f\|\|Au_0-f-\eta\|\leqslant\varepsilon\|Au_0-f\|$. 将这个不等式代入 (2.4.4) 就有

$$\|Au_0-f\|^2\leqslant\varepsilon\|Au_0-f\|,$$

从而

$$\|Au_0-f\|\leqslant\varepsilon,$$

由于 ε 是任意正数，所以 $Au_0-f=0$，这就证明了定理 2.4.1.

定理 2.4.1 给出了求与已知问题等价的变分问题的一般方法.

正定算子的理论可以推广到复数域上的 Hilbert 空间. 考虑复数域上的二次形

$$f(z_1,\ z_2)=(\bar z_1\bar z_2)\begin{pmatrix}1&\lambda\\ \mu&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=z_1\bar z_1+\lambda\bar z_1z_2+\mu z_1\bar z_2+z_2\bar z_2,$$

令 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，

$$\begin{aligned}f(z_1,z_2)=r_1^2+r_2^2&+(\lambda+\mu)r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\&+i(\lambda-\mu)r^2\sin(\theta_1-\theta_2),\end{aligned}$$

当 $z_1=z_2$ 时，

$$F = 2r^2 + (\lambda + \mu)r\cos 2\theta + i(\lambda - \mu)r^2\sin 2\theta,$$

要使 F 正定，必需 $\lambda = \mu$. 即 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$ 是对称矩阵。

为此我们考虑复数域上的 Hilbert 空间。实的 $L^2(\Omega)$ 空间中的内积定义为

$$(f, g) = \int_\Omega fg d\Omega,$$

若 f 和 g 是复函数，为保证 $(f,f) \geqslant 0$，取

$$(f, g) = \int_\Omega f\bar{g} d\Omega,$$

这样可以保证 $\|f\|^2 = \int_\Omega f\bar{f} d\Omega \geqslant 0$. 由于内积的定义不同，内积的性质也有区别，对实 Hilbert 空间 $(x, y) = (y, x)$，而对复 Hilbert 空间，以 $L^2(\Omega)$ 为例，

$$(g, f) = \int_\Omega g\bar{f} d\Omega = \int_\Omega \overline{f, \bar{g}}\, d\Omega = \overline{(f, g)},$$

因此 $(x, y) = \overline{(y, x)}$，内积公理中列举的其它性质不变，因此 Hilbert 空间的定义为如下：

设 H 为实(或复)数域 K 上的线性空间，若对 H 内任意一对元素 x，y，恒对应 K 中的一个数 (x, y)，满足

(1) $(x, x) \geqslant 0$，$(x, x) = 0$ 的充要条件是 $x = 0$；

(2) $(x, y) = (y, x)$ 当 K 是实数域，

　　$(x, y) = \overline{(y, x)}$ 当 K 是复数域；

(3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$；

(4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$，

则称 H 是实(或复)内积空间。

对复 Hilbert 空间，同样可以定义正定算子和对称算子，即设算子 A 定义在 Hilbert 空间 H 的一个稠密线性集合 M 上，假定存在常数 $C > 0$，使得对 M 中的每个 x 都有

$$(Ax, x) \geqslant C\|x\|^2,$$

则称 A 是 M 上的正定算子。

若对 A 的定义域中的任意 x 和 y 都有 $(Ax,y)=(y,Ax)$，则称 A 是对称算子。

对实内积空间，内积与范数的关系是

$$4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2.$$

对复内积空间

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2-\|x-y\|^2&=(x+y,x+y)-(x-y,x-y)\\&=\|x\|^2+\|y\|^2+(x,y)+(y,x)-\|x\|^2-\|y\|^2+(x,y)\\&\quad+(y,x)=2[(x,y)+(y,x)]=4\mathrm{Re}(x,y).\end{aligned}$$

为了求出 (x,y) 的虚部，设 $(x,y)=a+bi$，则

$$b=\mathrm{Re}(-i(x,y))=\mathrm{Re}(x,iy)=\frac{1}{4}[\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2],$$

所以

$$4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2).$$

下面我们证明

定理 2.4.2 算子 A 是对称算子的充要条件是 (Au,u) 为实数。

证明 必要性。设 A 是对称算子，从而 $(Au,u)=(u,Au)$，另一方面由内积性质知 $(u,Au)=\overline{(Au,u)}$，从而 $(Au,u)=\overline{(Au,u)}$，即 (Au,u) 是实数。

充分性：容易验证

$$\begin{aligned}4(Au,v)&=(A(u+v),u+v)-(A(u-v),u-v)\\&\quad+i[(A(u+iv),u+iv)-(A(u-iv),u-iv)],\\4(Av,u)&=(A(v+u),v+u)-(A(v-u),v-u)\\&\quad+i[(A(v+iu),v+iu)-(A(v-iu),v-iu)].\end{aligned}$$

由内积的性质知 $(A(u-v),u-v)=(A(v-u),v-u)$，

$$\begin{aligned}(A(v+iu),v+iu)&=(iA(u-iv),i(u-iv))\\&=(A(u-iv),u-iv),\\(A(v-iu),v-iu)&=(-iA(u+iv),i(u+iv))\\&=(A(u+iv),u+iv).\end{aligned}$$

于是 $(Au,v)=\overline{(Av,u)}=(u,Av)$ 即 A 是对称算子。 证

毕。

由定理 2.4.2 可知，对复数域K上的 Hilbert 空间，正定算子是对称算子，因此我们有

定理 2.4.1′ 设A是复 Hilbert 空间H上的正定算子，$\mathscr{D}(A)$在H中稠密，若方程

$$Au = f \tag{2.4.2′}$$

有解 u，则泛函

$$J(u) = (Au,u) - (u,f) - (f,u) \tag{2.4.3′}$$

取极小值，反之使 (2.4.3′) 取极小值的元素必满足 (2.4.2′)。

以复 Hilbert 空间代替实Hilbert 空间，定理的适用范围扩大了，条件却更简单了。

现在我们证明正定算子必有连续逆算子。 由于 $(Au, u) \geq C\|u\|^2$，并且 $|(Au,u)| \leq \|Au\|\|u\|$，因此 $C\|u\|^2 \leq \|Au\|\|u\|$，亦即 $\|Au\| \geq C\|u\|$，由定理 2.2.5 可知，A 有连续逆。

若A是正定对称算子，令 $[u,v] = (Au, v)$，可以验证[,]满足内积公理

(1) $[u,u] \geq 0$，若 $[u, u] = 0$，由 (2.4.1) 可知 $\|u\| = 0$.

(2) 由于A是对称算子，因此 $(Au, v) = (u, Av)$，也就是 $[u,v] = [v,u]$；

(3) $[\alpha u,v] = (A(\alpha u),v) = (\alpha Au,v)=\alpha(Au,v)=\alpha[u,v]$；

(4) $[u_1 + u_2,v] = (A(u_1 + u_2),v) = (Au_1 + Au_2, v)$

$$= (Au_1,v) + (Au_2,v) = [u_1,v] + [u_2,v],$$

因此[,]满足内积公理，集合 $\mathscr{D}(A)$ 按内积[,]构成内积空间。

下面给出求泛函 (2.4.3) 极小的几何意义，由于 $(Au, u) = [u,u]$，所以 (2.4.3) 可以写成

$$J[u] = [u,u] - (u,f) - (f,u).$$

(f, u) 显然是可加泛函，另外 $|(u, f)| \leq \|f\|\|u\|$。根据 (2.4.1)，$[u,u] \geq C\|u\|^2$。记 $\|u\|^2_{\mathscr{D}(A)} = [u,u]$，从而

$$|(u,f)| \leq \|f\|\|u\| \leq C^{-\frac{1}{2}}\|f\|\|u\|_{\mathscr{D}(A)},$$

于是 (u, f) 是 $\mathscr{D}(A)$ 上的有界线性泛函。 若 $\mathscr{D}(A)$ 是 Hi-

lbert 空间，据 Riesz 表现定理，能在 $\mathscr{D}(A)$ 中找到一个元素 u_0 使 $[u_0,u]=(u,f)$，于是

$$J(u)=[u,u]-2[u_0,u]=[u-u_0,u-u_0]-[u_0,u_0].$$

由于 $[u_0,u_0]$ 是确定的常数，因此要使 $J(u)$ 最小，只要第一部分最小，而第一部分当 $u=u_0$ 时取最小值，其最小值是 $-[u_0,u_0]$。

假如能构造序列 $\{u_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}J(u_n)=-[u_0,u_0]$，则称 $\{u_n\}$ 为极小化序列。由于 $J(u_n)=[u_n-u_0,u_n-u_0]-[u_0,u_0]$，因此

$$\lim_{n\to\infty}J(u_n)=-[u_0,u_0]\Longleftrightarrow[u_n-u_0,u_n-u_0]\to 0, \tag{2.4.5}$$

所以 $\{u_n\}$ 是极小化序列等价于 $\{u_n\}$ 按范数[，]收敛于真解。

上面的讨论中假设 $\mathscr{D}(A)$ 是 Hilbert 空间，即 $\mathscr{D}(A)$ 是完备的，也就是说 $\mathscr{D}(A)$ 中的任意基本序列都有极限。若 $\mathscr{D}(A)$ 不完备，则可以补充一些新元素使它变为完备空间，就像用无理数补充有理数使它成为整个数轴一样。设序列 $\{u_n\}$ 是基本序列，即 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|u_n-u_m\|=0$，如果 $\{u_n\}$ 在 $\mathscr{D}(A)$ 中没有极限，那么规定一个元素 u 作为序列 $\{u_n\}$ 的极限，暂时不考虑 u 的具体形式，只把它当作一个形式记号，这样的 u 叫作理想元素或极限元素。设极限元素 u 和 v 分别为基本序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 所定义，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-v_n\|=0$，那么认为 $u=v$。极限元素的内积定义为

$$(u,v)=\lim_{n\to\infty}(u_n,v_n),$$

显然 $\|u\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|$。可以证明把所有的极限元素补充到 $\mathscr{D}(A)$ 中，$\mathscr{D}(A)$ 成为完备空间，即 Hilbert 空间。这个补充新元素的过程叫作完备化，$\mathscr{D}(A)$ 按范数[，]完备化而得到的 Hilbert 空间记以 H_A。H_A 的具体特性，极限元素的具体特性取决于 $\mathscr{D}(A)$ 的特性，以后我们将进一步叙述。

现在叙述求解一般正定算子方程的 Ritz 法，Ritz 法就是一种构造极小化序列的方法，它的要点如下：在 Hilbert 空间 H_A

中选取在范数$\| \quad \|_{H_A}$ 意义下完备的元素序列 $\{\varphi_k\}$，即对 H_A 中的任意元素 u 都能找到一组常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使

$$\left\| u-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\|_{H_A}<\varepsilon,$$

这时就说 $\{\varphi_k\}$ 按范数 $\| \quad \|_{H_A}$ 是完备的，其中 ε 是预先给定的任意正数。假定 $\{\varphi_k\}$ 线性无关，令

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,$$

将 u_n 代入泛函 $J(u)$ 就有

$$J(u_n)=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_i\alpha_k(A\varphi_i,\varphi_k)-2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f,\varphi_i),$$

这时 $J(u_n)$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的函数。记这个函数为 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，将 F 对 α_i 求导数得到

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(A\varphi_i,\varphi_k)-2(f,\varphi_i),$$

在 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的极小值点 $\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=0$，从而

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(A\varphi_i,\varphi_k)=(f,\varphi_i),i=1,\cdots n. \tag{2.4.6}$$

这实际上是关于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性代数方程组。从几何上看，这个代数方程组一定有解。事实上设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 张成的子空间为 P_n。 Ritz 法相当于在 P_n 中寻找点 u_n 与某一给定点 g 距离最近，u_n 应该是 g 在 P_n 上的投影，显然 u_n 存在而且唯一。这个结果也可以用代数方法证明。

下面证明按 Ritz 法构造的序列是极小化序列。由于 $d=-[u_0,u_0]$ 是 F 的下确界，因此对任意给定的正数 ε，存在 $v\in H_A$ 使 $d+\frac{\varepsilon}{2}\geqslant J(v)\geqslant d$。设 v_n 是按 Ritz 法构造出来的近似解，显然

$$J(v_n)-J(v)=(Av_n,v_n)-2(f,v_n)-(Av,v)+2(f,v)$$

$$= (Av_n, v_n) - (Av, v) + 2(f, v - v_n),$$

从而

$$|J(v_n) - J(v)| \leqslant |(Av_n, v_n) - (Av, v)| + 2|(f, v - v_n)|$$

$$\leqslant \left| \|v_n\|_{H_A}^2 - \|v\|_{H_A}^2 \right| + 2|(f, v - v_n)|$$

$$\leqslant \|v_n - v\|_{H_A} [\|v_n - v\|_{H_A} + 2\|v\|_{H_A}] + 2\|f\| \|v - v_n\|, \tag{2.4.7}$$

由于 $\|v - v_n\|_{H_A}^2 \geqslant C\|v - v_n\|^2$，因此 (2.4.7) 可以写成

$$|J(v) - J(v_n)| \leqslant \|v_n - v\|_{H_A} \left[\|v_n - v\|_{H_A} + 2\|v\|_{H_A} + 2\frac{\|f\|}{\sqrt{C}} \|v - v_n\|_{H_A} \right],$$

又由于 $\{\varphi_n\}$ 在 H_A 中完备，总可以选择 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使 $\|v - v_n\|_{H_A}$ 充分小，因此 $|J(v) - J(v_n)| < \varepsilon/2$，于是有

$$d \leqslant J(v_n) < J(v) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant d + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty} J(v_n) = d$. 设 u_n 是按照 Ritz 法构造出来的函数，那么 $d \leqslant J(u_n) \leqslant J(v_n)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = d$，即 $\{u_n\}$ 是极小化序列，根据 (2.4.5)，$\{u_n\}$ 按范数 $\|\|_{H_A}$ 收敛于 u.

这些工作由 K. O. Friedrichs (1901—1982) 于 1934 年完成。前面指出按 Ritz 法求出的近似解 u_n 是 u_0 在有限维子空间 P_n 上的投影，从而对任意 $\varphi \in P_n$，$(u_n - u_0, \varphi)_{H_A} = 0$. 特别地有 $(u_n - u_0, \varphi_k)_{H_A} = 0$，即 $(A(u_n - u_0), \varphi_k) = 0$ 或 $(Au_n - f, \varphi_k) = 0$，$k = 1, \cdots, n$. 这就是 Galerkin 方法，从而使得正定算子 Ritz 法与 Galerkin 方法等价. 用 Ritz 法求解问题需要先找一个泛函，使这个泛函的 Euler 方程恰好是给定的方程。为使这个泛函存在，给定的方程必需满足某些条件，这些条件由 Vainberg 定理给出(可以参看 Oden & Reddy:"Variational Methods in Theoretical Mechanics" 第二章; 屠规彰，秦孟兆，数学学报 24; 2(1981)，190—206; 柳长茂，应用数学学报，1989，No4，p

489—498)。当这些条件不满足时，Ritz 法不再适用，但 Galerkin 法仍可应用，所以 Galerkin 法比 Ritz 法的应用范围更广. Galerkin 法可以用于求解抛物型方程和双曲型方程，但当求解双曲型方程时会降低精度，产生过分的振荡，从而产生各种非标准的 Galerkin 方法。读者可以参看黄明游《发展方程的有限元方法》(上海科学技术出版社，1988)。

Friedrichs 为正定算子方程的 Ritz 法建立了一个理论框架. 为了利用 Friedrichs 的理论必须先验证算子的正定性，对某些问题而言，验证正定性并非轻而易举，从这个意义上说，Friedrichs 不是结束了问题，而是为解决问题开辟了道路。在证明一些算子的正定性之前，我们对与这些算子 A 相应的空间 H_A 作些描述。

在一次连续可微函数集合 $C^1(\Omega)$ 中引进内积

$$(f,g)=\int_\Omega (fg+f_xg_x+f_yg_y)d\Omega \tag{2.4.8}$$

与这个内积相应的范数是

$$\|f\|_1=\left(\int_\Omega (f_x^2+f_y^2+f^2)d\Omega\right)^{1/2}. \tag{2.4.9}$$

设 $\{f_n\}$ 是按范数 $\|\ \|_1$ 的基本序列，由于 $L^2(\Omega)$ 是完备空间，必然存在 $L^2(\Omega)$ 中的函数 $g^{00}(x,y)$、$g^{10}(x,y)$ 和 $g^{01}(x,y)$ 使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (f_n(x,y)-g^{00}(x,y))^2 d\Omega\to 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}-g^{10}(x,y)\right)^2 d\Omega\to 0,\\
&\int_\Omega \left(\frac{\partial f_n}{\partial y}-g^{01}(x,y)\right)^2 d\Omega\to 0.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

若 $g^{00}(x,y)$ 是一次连续可微函数，取 $f_n(x,y)=g^{00}(x,y)$，$g^{10}(x,y)=\dfrac{\partial g^{00}}{\partial x}$，$g^{01}(x,y)=\dfrac{\partial g^{00}}{\partial y}$，显然 (2.4.10) 满足。在一般情况下 $g^{00}(x,y)\notin C^1(\Omega)$，这时我们把 $g^{10}(x,y)$ 记作 $g^{00}(x,y)$ 对 x 的一阶广义导数，$g^{01}(x,y)$ 叫作 $g^{00}(x,y)$ 对 y 的一阶广义

导数．如果将 $C^1(\Omega)$ 中所有按范数 $\|\ \|_1$ 收敛的序列的极限函数都补充进来，经过补充后的空间是完备的内积空间，也就是 Hilbert 空间，这个空间记作 $H^1(\Omega)$。补充进来的函数 $g^{00}(x,y)$ 可以不属于 $C^1(\Omega)$，但必须具有一阶广义导数，由于 $C^1(\Omega)$ 中的函数都有一阶广义导数，因此 $H^1(\Omega)$ 是具有平方可积的一阶广义导数的函数构成的空间。

类似地把在 Ω 内一次连续可微且在 $\partial\Omega$ 上为零的函数，按 $\|\ \|_1$ 完备化而得到的空间记作 $H_0^1(\Omega)$．一般地，把在 Ω 内 k 次连续可微函数集合按范数 $\|\ \|_k$（参见第二章(2.2.11)）完备化而得到的函数空间叫作 $H^k(\Omega)$，把在 Ω 内 k 次连续可微且在边界上满足 $u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\cdots=\left.\frac{\partial^{k-1}u}{\partial n^{k-1}}\right|_{\partial\Omega}=0$ 的函数集合按范数 $\|\ \|_k$ 完备化而得到的空间叫作 $H_0^k(\Omega)$，这里 n 表示 $\partial\Omega$ 的外法线。空间 $H^k(\Omega)$ 和 $H_0^k(\Omega)$ 都叫作 Sobolev 空间。下面给出正定算子的例子。

例 2.4.1 设 M 是满足 $u(a)=u(b)=0$ 的两次连续可微函数集合，算子

$$A=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)$$

是 M 上的正定算子，其中 $p(x)>p_0>0$ 是连续可微函数，$q(x)$ 是正的连续函数．事实上

$$(Av,u)=\int_a^b[-(pu')'+qu]u\,dx=\int_a^b[p(u')^2+qu^2]dx-puu'\Big|_a^b\geqslant p_0\int_a^b(u')^2dx. \tag{2.4.11}$$

由于 $u(a)=0$，因此

$$u(x)=u(x)-u(a)=\int_a^x u'(x)dx,$$

$$u^2(x)=\left(\int_a^x u'(x)dx\right)^2\leqslant\left(\int_a^x|u'(x)|dx\right)^2$$

$$\leqslant(b-a)\int_a^b(u'(x))^2dx,$$

两端从 a 到 b 积分得到

$$\int_a^b u^2(x)dx \leqslant (b-a)^2\int_a^b (u')^2dx,$$

令 $C=\dfrac{1}{(b-a)^2}$，则有

$$\int_a^b (u')^2dx \geqslant C\int_a^b u^2(x)dx, \tag{2.4.12}$$

由 (2.4.11) 和 (2.4.12) 可知

$$(Au,u)\geqslant p_0\int_a^b (u')^2dx \geqslant p_0C\int_a^b u^2dx, \tag{2.4.13}$$

从而A是正定算子.

由 (2.4.11) 可知

$$(Au,u)\geqslant p_0\int_a^b (u')^2dx = p_0\left[(1-\lambda)\int_a^b (u')^2dx\right.$$

$$\left.+\lambda\int_a^b (u')^2dx\right]\geqslant p_0\left[(1-\lambda)\int_a^b (u')^2dx\right.$$

$$\left.+\lambda C\int_a^b (u)^2dx\right],$$

取 $\lambda=\dfrac{1}{1+C}$，则有

$$(Au,u)\geqslant \frac{p_0C}{1+C}\int_a^b [(u')^2+u^2]dx,$$

令 $C_1=\dfrac{p_0C}{1+C}$，由于 $(Au,u)=[u,u]$，故 $[u,u]\geqslant C_1\|u\|_1^2$.

另一方面，由于 p 和 q 在 $[a,b]$ 上连续，故存在正数 C_2 使

$$[u,u]=(Au,u)=\int_a^b[-(pu')'+qu]udx=\int_a^b[p(u')^2+qu^2]dx$$

$$\leqslant C_2\int_a^b [u^2+(u')^2]dx,$$

从而范数 $[u,u]=(Au,u)$ 与范数 $\|u\|_1$ 等价，因此 H_A 可以看成M按 $\|\ \ \|_1$ 完备化而得到的空间，这个空间就是 $H_0^1[a,b]$.

如果边界条件改成 (1) $u(a)=u'(b)=0$; (2) $u'(a)=0$, $u(b)=0$; (3) $u'(a)=0$, $u'(b)=0$, 同样可以证明A 的正定

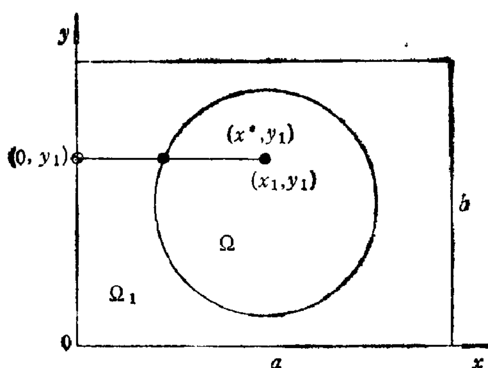


图 2.4.1

性。

上面证明A的正定性，不等式(2.4.12)是重要的工具，这个不等式被 Friedrichs 推广到高维空间。Friedrichs 于 1928 年证明了如下 Friedrichs 不等式。

若Ω为n维 Euclid 空间中边界为$\partial\Omega$的有界域，则存在常数C使得对于任意满足$u|_{\partial\Omega}=0$的一次连续可微函数u都有

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right]^2 d\Omega \geqslant C\int_{\Omega} u^2 d\Omega, \tag{2.4.14}$$

其中C是与u无关的常数。

证明如下：仅就二维情形证明，高维情形是类似的。由于Ω是有界域，故存在各边与相应坐标轴平行的矩形Ω_1使得$\Omega\subset\Omega_1$。设$u(x,y)\in C^1(\Omega)$，$u|_{\partial\Omega}=0$，假定$u(x,y)$在Ω外为零，这样就把u开拓到整个矩形Ω_1上。显然$u(x,y)$在Ω_1上连续。不失一般性，设坐标系如图 2.4.1 所示，a和b是矩形的两互相垂直的边的边长。在Ω_1中取任意点(x_1,y_1)，显然有

$$\int_0^{x^*}\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}dx+\int_{x^*}^{x_1}\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}dx=u(x_1,y_1)-u(0,y_1),$$

但在$(0,x^*)$上$u(x,y_1)=0$，且$u(0,y_1)=0$，因此

$$u(x_1,y_1)=\int_{x^*}^{x_1}\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}dx.$$

由 Schwarz 不等式

$$u^2(x_1,y_1)\leqslant x_1\int_{x^*}^{x_1}\left[\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}\right]^2dx\leqslant a\int_{x^*}^{a}\left[\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}\right]^2dx,$$

在矩形 $0\leqslant x_1\leqslant a$, $0\leqslant y_1\leqslant b$ 上积分这个不等式

$$\iint_{\Omega_1}u^2(x_1,y_1)dx_1dy_1\leqslant a\iint_{\Omega_1}\left(\int_{x^*}^{a}\left[\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}\right]^2dx\right)dx_1dy_1$$

$$\leqslant a\int_0^a\int_0^b\left(\int_{x^*}^{a}\left(\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}\right)^2dx\right)dx_1dy_1$$

$$\leqslant a^2\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

记 $a^2=\frac{1}{C}$，则有

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega\geqslant C\iint_{\Omega}u^2d\Omega.$$

这就证明了 Friedrichs 不等式.

有了 Friedrichs 不等式可以考虑下面的例子.

例 2.4.2 设 Ω 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，M 是满足

$$u|_{\partial\Omega}=0$$

的两次连续可微函数的集合。根据 Green 公式

$$\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\iint_{\Omega}[(u_x)^2+(u_y)^2]d\Omega+\iint_{\Omega}u\Delta ud\Omega,$$

对 $u\in M$ 有

$$(-\Delta u,u)=-\iint_{\Omega}u\Delta ud\Omega=\iint_{\Omega}[(u_x)^2+(u_y)^2]d\Omega$$

$$\geqslant C\iint_{\Omega}u^2d\Omega,$$

因此 $-\Delta$ 是 M 上的正定算子. 与例 2.4.1 相似，可以证明范数 $(-\Delta u,u)$ 与范数 $\|\ \|_1$ 等价，$H_{-\Delta}(\Omega)$ 就是 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$.

对 Poisson 方程 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.4.15}$$

M是满足 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial \Omega} = 0$ 的两次连续可微函数的集合. 由于 $u \equiv$常数属于 M, 因此 Friedrichs 不等式不再成立,必须另找出路. 为了修改 Friedrichs 不等式将 (2.4.14) 右端加一项 $R(u)$, 在二维情形就是

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) d\Omega + R(u) \geqslant C \iint_{\Omega} u^2 d\Omega$$

为使这个不等式成立, $R(u)$ 必须是非负的. 若这个不等式成立, 则从 $R(u) = 0$, $\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) d\Omega = 0$ 可以推出 $u = 0$, 因此增加的 $R(u)$ 必须满足下述两个条件:

(1) $R(u) \geqslant 0$,

(2) $R(u) = 0$, $\iint_{\Omega} [(u_x)^2 + (u_y)^2] d\Omega = 0 \Rightarrow u = 0$.

满足这两个条件的 $R(u)$ 很多, $R(u) = \left(\iint_{\Omega} u d\Omega\right)^2$ 就是一例,事实上早在 1894 年法国著名数学家 Poincarè 证明了存在与 u 无关的常数 C 使得

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) d\Omega + \left(\iint_{\Omega} u d\Omega\right)^2 \geqslant C \iint_{\Omega} u^2 d\Omega, \tag{2.4.16}$$

这个不等式称为 Poincarè 不等式. Poincarè 是上世纪末和本世纪初的伟大数学家,他不仅是数学家,也是物理学家、天文学家、哲学家和地理学家, 是对数学和它的应用具有全面知识的最后一个人. 下面我们就矩形域来证明 Poincarè 不等式. 假设 Ω 为矩形 $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 为 Ω 内两点,则

$$u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2) - u(x_2, y_1) + u(x_2, y_1)$$

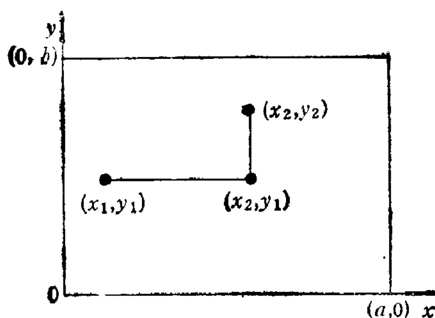


图 2.4.2

$$-u(x_1,y_1)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}dx+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial u(x_2,y)}{\partial y}dy,$$

将两端平方并利用不等式 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ 可知

$$(u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1))^2\leqslant 2\left[\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x}dx\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial u(x_2,y)}{\partial y}dy\right)^2\right],$$

对右端再用 Schwarz 不等式就得到

$$u^2(x_2,y_2)-2u(x_1,y_1)u(x_2,y_2)+u^2(x_1,y_1)$$

$$\leqslant 2a\int_0^a\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2dx+2b\int_0^b\left(\frac{\partial u(x_2,y)}{\partial y}\right)^2dy,$$

将上式两端对 x_1, y_1, x_2, y_2 积分就有

$$2ab\iint_\Omega u^2d\Omega-2\left(\iint_\Omega ud\Omega\right)^2\leqslant 2a\cdot a^2b\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2d\Omega$$

$$+2b\cdot ab^2\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2d\Omega,$$

从而

$$\iint_\Omega u^2d\Omega-\frac{1}{ab}\left(\iint_\Omega ud\Omega\right)^2\leqslant a^2\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2d\Omega$$

$$+b^2\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2d\Omega,$$

$$\iint_\Omega u^2 d\Omega \leqslant \max(a^2, b^2) \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) d\Omega + \frac{1}{ab}\left(\iint_\Omega u d\Omega\right)^2,$$

这就是 Poincarè 不等式。

由于 Poisson 方程 Neumann 问题(2.4.15)的解可以差一个任意常数，我们可以选择常数使 $\iint_\Omega u d\Omega = 0$，这样 Poincarè 不等式就变成

$$\iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) d\Omega \geqslant C \iint_\Omega u^2 d\Omega.$$

因此对 Poisson 方程 Neumann 问题将M取作满足 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ 和 $\iint_\Omega u d\Omega = 0$ 的两次连续可微函数集合，则对 $\forall u \in M$

$$\begin{aligned}(-\Delta u, u) &= -\iint_\Omega u\Delta u d\Omega = \iint_\Omega [(u_x)^2 + (u_y)^2] d\Omega \\ &\geqslant C \iint_\Omega u^2 d\Omega.\end{aligned}$$

从而 $-\Delta$ 在M上正定。

对 Poisson 方程第三边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \sigma > 0, \end{cases}$$

根据 Green 第一公式

$$-\iint_\Omega u\Delta u d\Omega = \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

由于在边界 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$，从而 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\sigma u$，因此

$$-\iint_\Omega u\Delta u d\Omega = \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 ds.$$

要证明 $-\Delta$ 正定，即存在与 u 无关的常数C使

$$-\iint_{\Omega} u\Delta u d\Omega \geqslant C\iint_{\Omega} u^2 d\Omega,$$

只需证明存在与 u 无关的常数 C 使

$$\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)d\Omega+\int_{\partial\Omega}\sigma u^2 ds \geqslant C\iint_{\Omega} u^2 d\Omega. \tag{2.4.17}$$

这个不等式被 Friedrichs 证明，也叫作 Friedrichs 不等式，证明过程可参见钱伟长：《变分法与有限元》上册 p 205—207. 因此对 Poisson 方程第三边值问题，$-\Delta$ 也是正定的。

至此我们已经对 Poisson 方程的三类边值问题证明了它们都是正定算子。对 Dirichlet 问题用的 Friedrichs 不等式：若 $u\in C^1(\Omega)$，$u|_{\partial\Omega}=0$，则存在与 u 无关的常数 C 使

$$\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)d\Omega \geqslant C\iint_{\Omega} u^2 d\Omega$$

或者等价地对 $\forall u\in H_0^1(\Omega)$，$|u|_{1,\Omega}^2 \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2$，其中 $\|_{1,\Omega}$ 的定义可见 (2.2.13)。对 Neumann 问题用的是 Poincarè 不等式

$$\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\,d\Omega+\left(\iint_{\Omega} u\,d\Omega\right)^2 \geqslant C\iint_{\Omega} u^2 d\Omega$$

或者等价地 $|u|_{1,\Omega}^2+\left(\iint_{\Omega} u d\Omega\right)^2 \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2$，其中 C 是与 u 无关的常数。对第三边值问题用的是另一个 Friedrichs 不等式

$$\iint_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)d\Omega+\int_{\partial\Omega}\sigma u^2 ds \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2$$

或者等价地 $|u|_{1,\Omega}^2+\int_{\partial\Omega}\sigma u^2 ds \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2$，其中 C 也是与 u 无关的常数。若 $u|_{\partial\Omega}=0$，则第二个 Friedrichs 不等式就退化成第一个 Friedrichs 不等式。第二个 Friedrichs 不等式的证明需要技巧，至于一般域上 Poincarè 不等式的证明就更需要技巧。事实上，当年 Poincarè 也只是对正方形证明了这个不等式，一般情况是很久以后才证明的。这些不等式形式不同，证明方法也不同，我们希望给出一个统一的不等式。由于当 u 为常数时，$|u|_{1,\Omega}=0$，

$\|u\|_{0,\Omega} \neq 0$，所以一般的不能有 $|u|_{1,\Omega} \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}$，不等式左端必须加修正项，把这一项记为 $B(u)$，从以上例子可以看出为了使 $B(u)$ 满足以下几个条件：

(1) $B(u)$ 是非负连续泛函．为了使

$$|u|_{1,\Omega}^2 + B(u) \geqslant C\|u\|_{1,\Omega}^2, \tag{2.4.18}$$

显然 $B(u)$ 必然是非负的，否则本来就不成立的不等式就更不成立了．

(2) 若 $B(u) = 0$，$u|_{1,\Omega} = 0$，则 $u \equiv 0$．这个条件是必要的，否则 $|u|_{1,\Omega}^2 + B(u) = 0$ 而 $\|u\|_{0,\Omega} \neq 0$，则 (2.4.18) 不成立．

(3) 对任意常数 λ，$B(\lambda u) = \lambda^2 B(u)$．这个条件为了使 $[|u|_{1,\Omega}^2 + B(u)]^{\frac{1}{2}}$ 成为范数．

我们希望在满足这三个条件的前提下证明 (2.4.18) 成立，证明可见第三章．为了使命题有更广泛的应用，考虑一些更复杂的例子．

例 2.4.3 考虑重调和方程第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2.4.19}$$

其中 $\Delta^2 = \partial_x^4 + 2\partial_{x^2y^2}^4 + \partial_y^4$ 是重调和算子，n 是 $\partial\Omega$ 的外法线．这个问题在力学上相当于周边固定的薄板的弯曲问题．作为重调和算子的定义域，我们考虑满足条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 和 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ 的四次连续可微函数集合 M．首先写出与 (2.4.19) 相应的泛函，在 Green 第一公式

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega + \iint_\Omega u \Delta v\, d\Omega$$

中取 v 为 Δu，则有

$$(Au, u) = \iint_\Omega u\Delta^2 u d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Delta u}{\partial n} ds - \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta u}{\partial y}\right) d\Omega. \qquad (2.4.20)$$

由于 $u|_{\partial\Omega}=0$，右端第一项为 0，第二项可用分部积分改变，利用分部积分公式 (1.2.15) 和 (1.2.16) 有

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta u \cos(n,x) ds - \iint_\Omega \Delta u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega,$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta u}{\partial y} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \Delta u \cos(n,y) ds - \iint_\Omega \Delta u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega,$$

将两式相加就有

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta u}{\partial y}\right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u ds - \iint_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega.$$

由于 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，因此右端第一项为零，将这个式子代入 (2.4.20) 就有

$$\iint_\Omega u\Delta^2 u d\Omega = \iint_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] d\Omega, \qquad (2.4.21)$$

利用分部积分可知

$$\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos(n,x) ds - \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} d\Omega, \quad (2.4.22)$$

由于 $u|_{\partial\Omega}=0$，从而 $\left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\partial\Omega}=0$，这里 τ 表示 $\partial\Omega$ 的切线方向。既然在边界上 $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 都为零，而 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 可以用它们的线

性组合表示，所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}=0$，将这两个条件代入 (2.4.22) 可知

$$\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}d\Omega=-\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}d\Omega,$$

对右端继续分部积分可知

$$\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}d\Omega=\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}d\Omega$$

$$=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(n,y)ds-\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 d\Omega,$$

将这个式子代入 (2.4.22) 并注意 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega}=0$，就有

$$\iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}d\Omega=-\iint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 d\Omega, \tag{2.4.23}$$

将 (2.4.23) 代入 (2.4.21) 就有

$$\iint_\Omega u\Delta^2 u d\Omega=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]d\Omega, \tag{2.4.24}$$

由此得到相应的泛函为

$$J(u)=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]d\Omega$$

$$-2\iint_\Omega fud\Omega.$$

下面证明 Δ^2 的正定性。由于 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}=0$，对 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 用 Friedrichs 不等式可知

$$\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]d\Omega=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]d\Omega\geqslant C\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega,$$

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]d\Omega=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega\geqslant C\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d\Omega,$$

将这两个不等式相加得到

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]d\Omega$$

$$\geqslant C\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega,$$

再将这个不等式代入 (2.4.24) 就有

$$\iint_{\Omega}u\Delta^2 u d\Omega\geqslant\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega.$$

由于 $u|_{\partial\Omega}=0$，对 u 用 Friedrichs 不等式，从而

$$\iint_{\Omega}u\Delta^2 u d\Omega\geqslant C\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega\geqslant C\iint_{\Omega}u^2 d\Omega, \tag{2.4.25}$$

这里 C 代表正的常数，前后的 C 可以不同，因此 Δ^2 是正定算子.

由 (2.4.24) 可知，$[u,u]=|u|_{2,\Omega}^2$，再由 (2.4.25) 可知

$$|u|_{2,\Omega}^2\geqslant C_1\|u\|_{2,\Omega}^2,$$

其中 C_1 是与 u 无关的常数. 另一方面

$$|u|_{2,\Omega}^2\leqslant\|u\|_{2,\Omega}^2.$$

因此 $|\ \ |_{2,\Omega}$ 或 $[\ \ ]$ 与 $\|\ \ \|_{2,\Omega}$ 是等价范数. 另由 (2.4.24) 可将 $(u,\Delta^2 u)$ 定义成 $|u|_{2,\Omega}$，注意 $J(u)$ 的表达式中只出现函数的二阶导数，所以对变分问题可以将 H_{Δ^2} 定义为满足 $u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$ 的两次连续可微函数集合按 $\|\ \ \|_{2,\Omega}$ 完备化所得到的空间，也就是空间 $H_0^2(\Omega)$.

重调和方程还有其它边值问题，以薄板弯曲问题为例，可以有以下三类边界条件：

(1) 全部边界固定，即 $u|_{\partial\Omega}=0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$;

(2) 全部边界简支，即

$$u|_{\partial\Omega}=0,\left[\Delta u-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right]_{\partial\Omega}=0,$$

其中 ρ_s 表示边界曲线的曲率半径，ν 为 Poisson 比，$\frac{\partial}{\partial\tau}$ 和 $\frac{\partial}{\partial n}$ 分别代表切向和法向导数；

(3) 混合边界条件，即一部分边界自由，一部分固定，一部分简支，固定边和简支边的条件已如 (1) (2) 所示，自由边界条件为

$$\left.\left[\Delta u-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right]\right|_{\partial\Omega}=0,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left[\Delta u+(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\right]-(1-\nu)\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\right\}\right|_{\partial\Omega}=0.$$

对第一类边界条件我们已经用 Friedrichs 不等式证明了重调和算子的正定性. 对第二类边界条件也可以证明重调和算子是正定的，但是由于 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega}$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}$ 可以不是零，所以证明过程中除了用到 Friedrichs 不等式外，还要用 Poincarè 不等式. 对第三类边界条件如果解不是唯一的(例如全部边界为自由边界，或部分自由部分简支的情况)，还要附加其它条件才能保证重调和算子的正定性. 这样逐个讨论无疑比较麻烦，自然希望用统一的方法证明重调和算子的正定性. 这种方法的精神大致是这样的：在满足三类边界条件任意一种的情况下都可以证明

$$\iint_\Omega u\Delta^2 u d\Omega=\iint_\Omega\{\nu(u_{xx}+u_{yy})^2+(1-\nu)(u_{xx}^2$$

$$+2u_{xy}^2+u_{yy}^2)\}d\Omega,$$

(参看钱伟长：《变分法及有限元》(上) p 210—211). 由于 $0<\nu<1$，因此只要证明存在与 u 无关的正数 C 使得

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + 2u_{xy}^2)d\Omega \geqslant C \iint_{\Omega} u^2 d\Omega$$

或者等价地有

$$|u|_{2,\Omega}^2 \geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2, \tag{2.4.26}$$

就可以证明重调和算子的正定性。对第一类边值问题，我们已经证明不等式 (2.4.26) 成立，对第二类边值问题也可以证明其正确性，但对第三类边值问题 (2.4.26) 可能不成立。例如当边界条件全是自由边界条件，区域 Ω 为矩形的情形，$\partial\Omega$ 是直线，$\rho_s = \infty$，边界条件可以写成

$$\left[\Delta u - (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial n}\left[\Delta u - (1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = 0.$$

容易验证任何一次多项式都满足边界条件，将一次多项式代入 (2.4.26) 可以发现 $|u|_{2,\Omega}^2 = 0$，但容易选择一次多项式 u 使

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \neq 0,$$

因此 (2.4.26) 不成立。我们可以用建立 (2.4.18) 的方法来修改 (2.4.26)，事实上我们可以证明若

(1) $B(u)$ 是 $H^2(\Omega)$ 上的非负连续泛函；

(2) 若 $B(u) = 0$，$|u|_{2,\Omega} = 0$，则 $u \equiv 0$；

(3) 对任意实数 λ，$B(\lambda u) = \lambda^2 B(u)$，

则有正数 C 使得对任意 $u \in H^2(\Omega)$ 都有

$$|u|_{2,\Omega}^2 + B(u) \geqslant C\|u\|_{2,\Omega}^2. \tag{2.4.27}$$

综合比较 (2.4.27) 和 (2.4.18)，可以产生下述猜想，(2.4.18) 是关于 $|u|_{1,\Omega}$ 的不等式，(2.4.27) 是关于 $|u|_{2,\Omega}$ 的不等式，一般地对 $|u|_{k,\Omega}$ 我们猜想如果

(1) $B(u)$ 是 $H^k(\Omega)$ 上的非负连续泛函；

(2) 若 $B(u) = 0$，$|u|_{k,\Omega} = 0$，则 $u \equiv 0$；

(3) 对任意实数 λ，$B(\lambda u) = \lambda^2 B(u)$，

则有正数 C 使得对任意 $u \in H^k(\Omega)$ 都有

$$|u|_{k,\Omega}^2 + B(u) \geqslant C\|u\|_{k,\Omega}^2. \tag{2.4.28}$$

显然不等式 (2.4.18) 和 (2.4.27) 都是 (2.4.28) 的特例。这个不等

式的证明请参看第三章§3.2.

例 2.4.4. 考虑各向同性弹性体的弹性力学方程组。用

$$u=(u_1,u_2,u_3)$$

表示弹性位移向量，$x=(x_1,x_2,x_3)$ 代表空间的任意一点，$2\varepsilon_{ik}(u)$ 表示应变张量的分量

$$\varepsilon_{ik}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),\ i,\ k=1,\ 2,\ 3.$$

应力张量分量为

$$\tau_{ik}=\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm},$$

其中 c_{iklm} 为弹性常数。对各向同性弹性体

$$c_{iiii}=\lambda+2\mu,\ c_{iikk}=\lambda,\ c_{ikik}=2\mu,\ (i\neq k),$$

其余的常数为零。记 $\tau_{ii}=\sigma_i$，$2\varepsilon_{ik}=\gamma_{ik}$ 则有

$$\sigma_1=(\lambda+2\mu)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_1,$$

其中 $\theta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\varepsilon_i=\varepsilon_{ii}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$。类似地有

$$\sigma_2=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_2,\ \sigma_3=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_3,$$

$$\tau_{12}=\mu\gamma_{12},\ \tau_{13}=\mu\gamma_{13},\ \tau_{23}=\mu\gamma_{23}.$$

由于 $\varepsilon_1=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$，$\varepsilon_2=\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$，$\varepsilon_3=\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$，因此 $\theta=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}=\operatorname{div}u$。将这些表达式代入 τ_{ik} 的表达式中就有

$$\tau_{ii}=\lambda\operatorname{div}u+2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\ i=1,\ 2,\ 3,$$

$$\tau_{ik}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),\ i\neq k,\ i,\ k=1,\ 2,\ 3,$$

其中 $\tau_{ii}=\sigma_i$。τ_{ik} 应该满足平衡方程

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}+F_i=0,\ i=1,\ 2,\ 3,$$

其中 F_i 为沿 x_i 轴方向的体积力。将 τ_{ii} 和 τ_{ik} 的表达式代入这些方程加以整理就有

$$
\begin{cases}
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}u+\mu\Delta u_1=-F_1,\\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div}u+\mu\Delta u_2=-F_2,\\
(\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{div}u+\mu\Delta u_3=-F_3.
\end{cases}
\tag{2.4.29}
$$

这个方程组叫作各向同性情形下的弹性力学方程组。

类似的对一般弹性体我们可以得到

$$
\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}=-F_i,\quad i=1,2,3. \tag{2.4.30}
$$

将 $\varepsilon_{ik}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ 代入 (2.4.30)，可以得到关于 u 的偏微分方程组

$$
-Au=F,
$$

其中 A 是一个元素为线性常系数偏微分算子的矩阵，$u=(u_1,u_2,u_3)$。

在研究 Poisson 方程和重调和方程时，Green 公式有重要的作用。对弹性力学方程组可以建立类似的公式，由于

$$
\iint_\Omega v_i\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}d\Omega=\iint_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}\left(v_i\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}\right)d\Omega
$$

$$
-\iint_\Omega\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}d\Omega,\quad k=1,2,3,
$$

因此

$$
\iint_\Omega vAud\Omega=-\sum_{i=1}^{3}\iint_\Omega v_i\sum_{k,l,m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(c_{iklm}\varepsilon_{lm})d\Omega
$$

$$
=-\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}v_i\sum_{k=1}^{3}\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\cos(n,x_k)ds
$$

$$
+\iint_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}d\Omega,
$$

其中 $n_k=\cos(n,x_k)$，$k=1,2,3$。注意 $c_{iklm}=c_{kilm}$，故

$$c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+c_{kilm}\varepsilon_{lm}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}=c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

$$=2c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\varepsilon_{ik}(v)=c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\varepsilon_{ik}(v)$$

$$+c_{kilm}\varepsilon_{lm}(u)\varepsilon_{ki}(v),$$

其中用到 $\varepsilon_{ik}(v)=\varepsilon_{ki}(v)$. 因此

$$\iint_\Omega vAud\Omega=\sum_{i=1}^{3}\iint_\Omega\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{ik}(v)\varepsilon_{lm}(u)d\Omega$$

$$-\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}v_i\varepsilon_{lm}(u)\right)\cos(n,x_k)ds.$$

令

$$2w(u,v)=\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{ik}(v)\varepsilon_{lm}(u)$$

$$=\sum_{i,k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{ik}(u)\varepsilon_{lm}(v)$$

$$t(u)=\sum_{k,l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm}(u)\cos(n,x_k)e_i,$$

e_k 是 x_k 轴方向的单位向量,则上式可以写成

$$\iint_\Omega v\cdot Aud\Omega=2\iint_\Omega w(u,v)d\Omega-\int_{\partial\Omega}v\cdot t(u)ds.\quad(2.4.31)$$

这个公式叫作 Betti 第一公式。把这个公式与 Green 第一公式

$$\iint_\Omega v\Delta ud\Omega=2\iint_\Omega\frac{1}{2}(u_xv_x+u_yv_y)d\Omega-\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

相比，可以发现 A 相当于 Δ, $w(u,v)$ 相当于 $\frac{1}{2}(u_xv_x+u_yv_y)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 相当于 $t(u)$, 因此 Betti 第一公式可以看成弹性力学方程组的 Green 第一公式. 根据 Hooke 定律

$$\tau_{ik}=\sum_{l,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm},\quad i,k=1,2,3,$$

这里 $\tau_{ii}=\sigma_i$ 是主应力，τ_{ik} 是剪应力,因此 $t(u)$ 可以写成

$$t(u) = \sum_{i,k=1}^{3} \tau_{ik} \cos(n, x_k) e_i. \tag{2.4.32}$$

和 Green 第二公式一样，可以得到 Betti 第二公式

$$\iint_{\Omega} (u \cdot Av - v \cdot Au) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u \cdot t(v) - v \cdot t(u)) ds. \tag{2.4.33}$$

Poisson 方程有三类边值问题，即 Dirichlet 问题、Neumann 问题和混合问题，对弹性力学方程组也可以提出三类边值问题，如果把 $t(u)$ 类比成 $\frac{\partial u}{\partial n}$，这三类边值问题可以提成如下形式：

(1) 第一边值问题

$$\begin{cases} Au = F, & \text{在}\ \Omega\ \text{内}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

这里 $u = (u_1, u_2, u_3)$，$F = (F_1, F_2, F_3)$ 都是向量函数，物理意义是在边界上给定位移，数学上则类似于 Poisson 方程第一边值问题。

(2) 第二边值问题

$$\begin{cases} Au = F, & \text{在}\ \Omega\ \text{内}, \\ t(u)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

是在边界上给定应力，数学上与 Poisson 方程 Neumann 问题相似。

(3) 混合问题

$$\begin{cases} Au = F, & \text{在}\ \Omega\ \text{内}, \\ u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad t(u)|_{\partial\Omega_2} = 0, \end{cases}$$

其中 $\partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_2$ 不相交，但 $\partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_2$ 合成 $\partial\Omega$。数学上类似于 Poisson 方程的混合问题，即部分边界上给定 Dirichlet 条件，部分边界上给定 Neumann 条件。

为了研究弹性力学方程组 Ritz 法的收敛性，自然希望弹性理论算子 A 是正定算子，由 Betti 第一公式可知

$$(Au, u) = \iint_{\Omega} u \cdot Au d\Omega = 2 \iint_{\Omega} w(u, u) d\Omega$$

$$-\int_{\partial\Omega} u\cdot t(u)ds. \qquad (2.4.34)$$

对第一边值问题 $u|_{\partial\Omega}=0$，对第二边值问题 $t(u)|_{\partial\Omega}=0$，对第三边值问题在部分边界上 $u|_{\partial\Omega_1}=0$，而在另一部分边界上

$$t(u)|_{\partial\Omega_2}=0,$$

因此总有

$$\int_{\partial\Omega} u\cdot t(u)ds=0.$$

从而对满足三种边界条件的算子有

$$(Au,u)=2\iint_{\Omega} w(u,u)d\Omega=\sum_{i,k,l,m=1}^{3}\iint_{\Omega} c_{iklm}\varepsilon_{ik}(u)\varepsilon_{lm}(u)d\Omega. \qquad (2.4.35)$$

对均匀各向同性弹性体，c_{iklm} 可以用两个 Lame 常数表示

$$c_{iiii}=\lambda+2\mu,\ c_{iikk}=\lambda,\ c_{ikik}=2\mu,\ (i\neq k)$$

其余常数为零。因此

$$\begin{aligned}2w(u,u)=&(\lambda+2\mu)(\varepsilon_{11}^2(u)+\varepsilon_{22}^2(u)+\varepsilon_{33}^2(u))\\&+2\lambda(\varepsilon_{11}(u)\varepsilon_{22}(u)+\varepsilon_{11}(u)\varepsilon_{33}(u)+\varepsilon_{22}(u)\varepsilon_{33}(u))\\&+4\mu(\varepsilon_{12}^2(u)+\varepsilon_{13}^2(u)+\varepsilon_{23}^2(u))=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\\&+\varepsilon_{33})^2+2\mu(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2+2\varepsilon_{12}^2+2\varepsilon_{13}^2+2\varepsilon_{23}^2).\end{aligned}$$

这里用到了 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}(i,j=1,2,3)$。将这个表达式代入(2.4.35)得到

$$(Au,u)=\iint_{\Omega}\left[\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2+2\mu\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2(u)\right]d\Omega.$$

为了证明A的正定性只须证明

$$\iint_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}^2(u)d\Omega\geqslant C\iint_{\Omega}u^2d\Omega$$

或者等价地

$$|\varepsilon_{ij}^2(u)|_{0,\Omega}^2\geqslant C\|u\|_{0,\Omega}^2,$$

先对第一边值问题即 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的情形来证明

$$(Au,u)=\iint_{\Omega}(\lambda+2\mu)(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2)d\Omega$$

$$
+ 2\lambda \iint_{\Omega} (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) d\Omega
$$

$$
+ 4\mu \iint_{\Omega} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) d\Omega
$$

$$
= \lambda \iint_{\Omega} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 d\Omega + 2\mu \iint_{\Omega} (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) d\Omega
$$

$$
+ 4\mu \iint_{\Omega} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) d\Omega
$$

$$
\geqslant 2\mu \iint_{\Omega} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) d\Omega + 4\mu \iint_{\Omega} \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij}^2 d\Omega
$$

$$
\geqslant 2\mu \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] d\Omega
$$

$$
+ \mu \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right.
$$

$$
\left. + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right] d\Omega + 2\mu \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right] d\Omega.
$$

由于 $u_1|_{\partial\Omega} = 0$，$u_2|_{\partial\Omega} = 0$，$u_3|_{\partial\Omega} = 0$，用分部积分法可知

$$
\iint_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} d\Omega,
$$

$$
\iint_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} d\Omega,
$$

$$
\iint_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} d\Omega,
$$

因此

$$
(Au, u) \geqslant 2\mu \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right] d\Omega
$$

$$
+ \mu \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right.
$$

$$+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\Bigg]d\Omega+2\mu\iiint_\Omega\Bigg[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Bigg]d\Omega\geqslant\mu\iint_\Omega\Bigg[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\Bigg]d\Omega. \tag{2.4.36}$$

令$|u|^2_{1,\Omega}=\iint_\Omega\Bigg[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2$

$$+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\Bigg]d\Omega,$$

则(2.4.36)可以写成 $(Au,u)\geqslant\mu|u|^2_{1,\Omega}$. 由于 $u_i|_{\partial\Omega}=0$ $(i=1,2,3)$，由 Friedrichs 不等式可知

$$(Au,u)\geqslant C\|u\|^2_{0,\Omega},$$

这就证明了算子A的正定性。

注意在推导过程中我们得到

$$(Au,u)\geqslant 2\mu\iint_\Omega(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2)d\Omega$$

$$+4\mu\iint_\Omega(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2+\varepsilon_{23}^2)d\Omega\geqslant\mu|u|^2_{1,\Omega},$$

因此有与u无关的正数C使

$$\iint_\Omega\sum_{i,j=1}^3\varepsilon_{ij}^2(u)d\Omega\geqslant C\iint_\Omega u^2d\Omega,$$

或者等价地

$$\sum_{i,j=1}^3|\varepsilon_{ij}|^2_{0,\Omega}\geqslant C|u|^2_{1,\Omega}\geqslant C^1\|u\|^2_{1,\Omega}, \tag{2.4.37}$$

这个不等式叫 Korn 不等式。由于

$$(Au,u)\geqslant 2\mu\sum_{i,j=1}^3|\varepsilon_{ij}|^2_{0,\Omega},$$

所以只要有 Korn 不等式成立，就可以证明弹性理论算子的正定性。和 Friedrichs 不等式一样，Korn 不等式 (2.4.37) 是在条件 $u|_{\partial\Omega}=0$ 的情形推出来的，在一般情况下未必成立。对第二边值问题 $u|_{\partial\Omega}\neq 0$，像 Poincarè 不等式一样，必须将左端增加一项，即

$$\sum_{i,j=1}^{3}|\varepsilon_{ij}|_{0,\Omega}^{2}+|u|_{0,\Omega}^{2}\geqslant C\|u\|_{1,\Omega}^{2},$$

这些不等式分别由 Korn 在 1906 年和 1909 年所证明。第一边值问题的情况很简单，但第二边值问题情形的证明很复杂，以致 Friedrichs 无法判断证明是否正确，因此他决定自己来证明它。他先在 1937 年对两个自变量的情形证明了这个不等式，然后在1947 年对三维情形证明了这个不等式。从这以后，Friedrichs 认为他已经完成了这项工作，转向研究别的问题。从 Riemann 提出 Dirichlet 原理到 1947 年差不多经过了整整一百年的时间，距提出 Ritz 法也已经 40 年了。

和推出 (2.4.28) 一样，在一般情形下可以证明如果

(1) $B(u)$ 是 $H^1(\Omega)$ 上的非负连续泛函；

(2) 若 $B(u)=0$ 且 $|\varepsilon_{ij}|_{0,\Omega}=0$, i, $j=1,2,3$, 则

$$u\equiv 0;$$

(3) 对任意常数 λ, $B(\lambda u)=\lambda^2 B(u)$,

则存在与 u 无关的正数 C 使

$$\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}^{2}(u)+B(u)\geqslant C\|u\|_{1,\Omega}^{2}. \tag{2.4.38}$$

还可以将 (2.4.28) 与 (2.4.38) 统一成一个不等式，有兴趣的读者可以参看张鸿庆、王鸣：广义 Korn-Poincarè 不等式及其应用 (I)，科学探索，1982，Vol.2，No.3，p83—90。

第三章　以能量为长度的几何

§ 3.1　从音乐引起的数学理论

在第一章中已指出，古人猜测大自然不作多余的事，由此导致变分原理的产生，第二章中指出希腊科学家十分欣赏几何，坚持用几何规律解释世界，几何学获得光辉的发展．二十世纪以来，发展了无穷维空间的几何，在这种新的几何里，化变分问题为几何问题．以 Riemann，Hilbert 等人的工作为基础，Friedrichs（1901—1982）给出变分原理一个漂亮的理论，在这个理论发展的过程中，产生了 Sobolev 空间．Sobolev 空间的几何是一种以能量为长度的几何，这种几何成为研究偏微分方程和有限元方法的重要工具．为了介绍 Sobolev 空间理论，我们需要新的工具，在介绍这种新的工具之前，让我们追溯古代科学家、哲学家的另一猜想．

早在 Pythagoras 时代就发现，用三条弦发出三个音，当弦长为 6:4:3 时，它们就发出一个谐音的第一度音、第五度音和第八度音，音乐和整数比的这种奇妙的联系给他们以深刻的印象．他们设想宇宙应该是和谐的，既然音乐是和谐的，各行星与地球的距离必需符合音乐的规律才能奏出天体的音乐．算术、几何、音乐、天文都有数的秩序，都是数学的分支．这些想法有许多错误，但是含有真理的因素．这就是世界是有规律的，它的基本规律是简单的，可以用数学语言表示，而其它规律则可由基本规律用数学方法推演出来，这和盘古开天辟地一类神话相比是一个明显的进步．这个指导思想推动着许多哲学家和科学家去创功立业，Copernicus，Brache，Tycho，Kepler，Galileo，Decartes，Newton 和 Leibniz 就是这类人的光辉代表．

微积分诞生以后，18 世纪这个问题有了重要的进展，John

Bernoulli 和 D'alembert 研究了如下问题．两端固定、初始位移为 $f(x)$、初始速度为 $g(x)$ 的弦振动问题，它可归结为求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_t|_{t=0} = g(x), \end{cases}$$

其中 $u(x,t)$ 表示弦的横向位移，l 表示弦的长度。Euler 给出这个问题的三角级数形式解，但他没有说明这个级数是有限项还是无穷项。John Bernoulli 的儿子 Daniel Bernoulli(1700—1782)以全然不同的形式给出这个问题的解，它形如

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 c_n 和 d_n 为待定常数，显然 $u(x,t)$ 满足方程和边界条件，为了满足初始条件，将 $u(x,t)$ 代入初始条件得到

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x),$$

$$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x).$$

问题是能否选择 c_n 和 d_n 使上两式成立？

Daniel Bernoulli 坚持认为这种选择是可能的，但是他只是根据物理直观而未给出数学证明．D'alembert 和 Euler 反对 Bernoulli 的意见，继之而起的著名数学家 Lagrange、Laplace 等人也反对 Bernoulli 的意见．19 世纪初，年轻的 Fourier 不顾权威们的反对，研究得到 Fourier 系数的公式，并选取了大量的函数，计算出它们的 Fourier 系数，画出它们的正弦级数前几项和的图形．Fourier 没有给出一个函数展成 Fourier 级数所必需满足的条件，他的方法被 Poisson 和 Cauchy 所接受，但是 Cauchy 和 Poisson 也未能给出 Fourier 级数收敛的条件，这个条件是 Dirichlet 于 1829 年给出的．

当弦振动问题论战还在进行的时候，对乐器的兴趣引起了进

一步的工作，Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange 写了许许多多种类繁多到难以置信的论文。Daniel Bernoulli 发现风琴泛音的频率是基音频率的奇数倍，并且用实验来验证。他们研究长笛、风琴、铃、喇叭、小号、军号等各种乐器，Euler 还研究了各种形状的号角和鼓，Euler 和 Lagrange 都对声音在空气中的传播进行了研究，这些研究产生了高维波动方程。

Fourier, Cauchy 和 Poisson 发展了 Fourier 积分理论。设 $f(t)$ 是周期函数，T 是周期，即 $f(t)=f(t+T)$，将 $f(t)$ 表示为 Fourier 级数，写成复数形式即为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt/T},\ -\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2},$$

其中

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt/T}dt.$$

命 $\Delta s=\frac{1}{T}$，$\frac{k}{T}=k\Delta s=s_k$，$F(s_k)=Tc_k$，于是当 $T\to\infty$ 时，

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta s)e^{2\pi is_kt}\Delta s$$

$$\approx f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{2\pi ist}ds,$$

$$F(s_k)=Tc_k=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-2\pi ikt/T}dt$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-2\pi is_kt}dt$$

$$\approx F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi ist}dt,$$

这样就导致一对互逆的 Fourier 变换

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{2\pi ist}ds,\ -\infty<t<\infty. \tag{3.1.1}$$

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-2\pi ist}dt,-\infty<s<\infty. \qquad (3.1.2)$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的 Fourier 变换或谱函数，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的逆 Fourier 变换或原函数. 这个互逆关系将记为 $f(t)\sim F(s)$. 如果 t 表示时间，则 $s=\frac{1}{T}$ 代表频率，这时 Fourier 变换建立了时间域与频率域之间的关系. 如果 t 表示空间距离，则 $s=\frac{1}{T}$ 表示单位距离的波数. 若 P 表示动量，则 $s=\frac{1}{T}=\frac{P}{h}$，其中 h 是 Planck 常数，这样 Fourier 变换就建立了空间变量和动量的关系. 综上所述，这组反演公式说明时空描写与频率—动量描写世界是一一对应的. "四方上下曰宇，往古来今曰宙"，宇宙就是四维时空. 由于时空与频率动量的一一对应，我们也可以认为"四方上下皆动量，往古来今是频率"，这种对应的特征体现在 Fourier 变换的下述性质上：

原函数 $f(t),g(t)$	象函数 $F(s),G(s)$	
1. $f(t)$	$F(-s)$	互逆性
2 $\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(s)+\beta G(s)$	线性
3 $f(-t)$	$F(-s)$	偶(奇)性～偶(奇)性
4. $f^*(t)$(*表示取共轭)	$F^*(-s)$	实性～共轭对称性
5. $f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{s}{a}\right)$	尺度伸缩性
$\frac{1}{\|a\|}f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(as)$	
6 $f(t-a)$	$e^{-2\pi ias}F(s)$	平移 a ～ 频率因子 $e^{-2\pi ias}$
$e^{2\pi iat}f(t)$	$F(s-a)$	
7. $f^{(n)}(t)$	$(2\pi is)^nF(s)$	
$(-2\pi it)^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$	
8. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$	卷积～乘积

原函数 $f(t),g(t)$　　象函数 $F(s),G(s)$

$$=\int_{\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau$$

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$

Parseval 恒等式　　保范数

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(s)G(s)ds$$

保内积

性质 5 指出，若 $f(t) \sim F(s)$，则 $f(at) \sim \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$，当 $a>1$ 时，$f(t) \to f(at)$ 是把$f(t)$的图形横向压缩，而 $F(s) \to \frac{1}{|a|} \times F\left(\frac{s}{a}\right)$则是把 $F(s)$ 的图形横向拉伸，伴以纵向压缩而面积不变. 原函数变窄，则谱函数变宽，即在 Fourier 变换下宽度朝相反方向转化，这里隐含了对粒子位置与动量过度的测量精度是互相矛盾的，一个提高了，另一个必降低. 事实上，从 Fourier 变换可以严格地推出量子力学的测不准原理。从 Fourier 变换的各种性质中可以洞察到世界的两重性。

在(3.1.2)中，令 $\xi=-2\pi s$，$t=x$，$F(s)=\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\xi)$，则(3.1.2)变成

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x}dx. \tag{3.1.3}$$

类似地(3.1.1)变为

$$f(x)=\int_{+\infty}^{-\infty}\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\xi)e^{-i\xi x}d\left(-\frac{\xi}{2\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{-i\xi x}d\xi. \tag{3.1.4}$$

以后我们把 $\hat{f}(\xi)$ 叫作 $f(x)$ 的 Fourier 变换，它的好处是正变换

(3.1.3)与反变换(3.1.4)的系数相同，都是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，其它性质也比较简单。例如性质 7

$$F[f^{(n)}(t)] = (2\pi i s)^n F(s),$$

经类似的变换变为

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f^{(n)}(x)} = (-i\xi)^n \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(x),$$

亦即

$$\widehat{f^{(n)}(x)} = (-i\xi)^n \hat{f}(x). \tag{3.1.5}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s)|^2 ds = \int_{+\infty}^{-\infty} |\sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\xi)|^2 d\left(-\frac{\xi}{2\pi}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx,$$

因此性质 9 不变，亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{3.1.6}$$

Fourier 变换可以推广到 n 维情形。一般地令

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} e^{i\xi\cdot x} f(x) dx, \tag{3.1.7}$$

其中 ξ 和 x 是 n 维 Euclid 空间中的向量，$\xi\cdot x$ 表示 ξ 和 x 的内积，可以证明

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} e^{-i\xi\cdot x} f(\xi) d\xi, \tag{3.1.8}$$

$$\widehat{D^\alpha f(\xi)} = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi). \tag{3.1.9}$$

利用(3.1.9)可以证明

$$\|f\|_m^2 = \int_{E^n} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.1.10}$$

(3.1.10)给出 Sobolev 空间范数的另一种表示是个十分重要的公式。(3.1.9)表明 Fourier 变换把微分运算变成乘法运算。众所周

知，对数运算把乘法运算变成加法运算，从而可以利用对数运算计算乘法. 类似地，Fourier 变换把微分运算变成代数运算，从而把线性常系数微分方程变化代数方程，因此可以用 Fourier 变换求解线性常系数微分方程. 用 Fourier 变换可以处理线性常系数偏微分方程的初值问题. 例如，对 x 实行 Fourier 变换，可以将 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 变成常微分方程（性质 7），线性常系数常微分方程的通解容易求出，再用 Fourier 逆变换反演，就可以求出线性常系数偏微分方程的通解. 这个想法很美妙，但是实行起来有个缺点. 常系数线性常微分方程的通解可以用指数函数乘多项式形式的解表示出来，但指数函数与多项式在无穷远处不趋近于零，不能进行 Fourier 逆变换，甚至于连 1 都不能进行 Fourier 逆变换. 为了使 1 能进行 Fourier 逆变换，必需找一个函数使它的 Fourier 变换为 1，这需要扩大函数概念，引进新的函数，这个函数就是 Dirac 的 δ 函数. 在零点的 δ 函数具有性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \tag{3.1.11}$$

这里 $f(x)$ 是任意函数，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-2\pi i s t} dt = e^{-2\pi i s t}\big|_{t=0} = 1,$$

亦即 $\delta(x)$ 的 Fourier 变换是 1. 由性质 6 可知 $\delta(t-a) \sim e^{-2\pi i a s}$，由性质 7，$\delta^{(n)}(t) \sim (2\pi i s)^n$，$\delta(t-a)$ 与 $\delta^{(n)}(t)$ 的卷积就对应于指数函数乘幂函数，由此可以相信，只要引进 δ 函数与关于 δ 函数的运算，就可以构造出常系数线性偏微分方程的通解. 事实上也正是如此. 50 年代继 Schwartz 建立广义函数论的 Fourier 变换之后，Ehrenpreis 与 Malgrange 迅速地证明，若 L 是线性常系数偏微分算子，f 是充分光滑的函数，则 $Lu = f$ 至少局部地有解.

δ 函数的引入，使我们很受启发，可以把它比作 $\sqrt{-1}$ 的引入. 在代数方程求解问题中，如果不引进 $\sqrt{-1}$，就必需讨论代数

方程有解的条件，那将是十分繁杂的．而一旦引进了$\sqrt{-1}$，并且只引进一个$\sqrt{-1}$，就产生了所有复数 $a+b\sqrt{-1}$．在复数域中，n 次代数方程就有了 n 个根．$\sqrt{-1}$是个理想的虚构的数，代数方程理论正是在这个虚构的理想的境界中达到了完美和统一．Hadamard 指出，在实数域中求解问题常常以经过复数域为最简捷．量子力学表明，基本物理规律也离不开$\sqrt{-1}$，没有$\sqrt{-1}$的数域对代数方程求根来说是不完备的．类似地，没有 δ 函数的函数集合，对求解偏微分方程也是不完备的，这种不完备性可以由常数 1 不能进行 Fourier 变换看出，也可以由没有 Fourier 系数全为 1 的函数看出(参看第二章 §2.4)看出．可以证明，δ 函数就是填补天空坍陷的闪闪发光的石头，因此补充了 δ 函数的函数集合才是完备的．1957 年 Lewy 举例说明了，对变系数偏微分方程，即使系数充分光滑，仍然可能无解．这表明函数概念还要继续扩张．回顾历史，人们为了求解 $x+2=1$，引进了负数．为了求解 $2x=1$，引进了分数．为了求解 $x^2-2=0$，引进了无理数．为了求解 $x^2+1=0$，引进了虚数．一部代数方程求解的历史就是不断扩张数的概念的历史，因此我们猜想，求解偏微分方程的历史应该是函数概念不断扩张的历史．Lewy 的反例表明，函数概念还要继续扩张，相当于代数基本定理的偏微分方程基本定理尚未建立起来．当然，如何扩张函数使更多的偏微分方程有解，还需要艰苦的探索．

§3.2 弱导数与 Sobolev 空间

在第二章中讲过，有界集紧致是有穷维空间与无穷维空间的分水岭，由于紧性的破坏，使无穷维空间的理论复杂起来，因此紧性十分重要，从这个意义上说，紧性也有要紧的意思．为了克服由于紧性破坏产生的困难，在第二章中引进弱收敛概念．由于在 Hilbert 空间中有界集弱紧致，因此在弱的意义下，相应的理论既整齐又美

丽，我们希望用这个理论来研究我们的问题。

考虑 Hilbert 空间H中的算子方程

$$Lu = f. \tag{3.2.1}$$

设u是(3.2.1)的解，则对任意$\varphi \in H$有

$$(Lu - f, \varphi) = 0, \tag{3.2.2}$$

反之，若对任意 $\varphi \in H$，(3.2.2) 成立，则 $Lu - f = 0$，从而(3.2.2)和(3.2.1)等价．由于对固定的u和f，$(Lu - f, \varphi)$ 是H上的线性泛函，它相当于 $Lu - f$ 在φ上的投影再乘上φ的长度(范数)，因此(3.3.2)是方程(3.2.1)的弱形式。若L^*是L的共轭算子，即对任意$\varphi \in H$都有

$$(Lu, \varphi) = (u, L^*\varphi). \tag{3.2.3}$$

则这时(3.2.2)可以改写成

$$(u, L^*\varphi) = (f, \varphi). \tag{3.2.4}$$

若存在 $u \in H$，使得对于任意$\varphi \in H$(3.2.4) 都成立，则称u是方程$Lu = f$ 的弱解。

设 $H = L^2[0,1]$，u是$[0,1]$上的连续可微函数，$L = \frac{d}{dx}$，f是$[0,1]$上的连续函数，φ是在$[0,1]$两端为零的连续可微函数，则有

$$(Lu - f, \varphi) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} - f\right)\varphi dx = \int_0^1 \varphi \frac{du}{dx} dx$$

$$- \int_0^1 f\varphi dx = -\int_0^1 u \frac{d\varphi}{dx} dx - \int_0^1 f\varphi dx.$$

因此方程 $\frac{du}{dx} = f$的弱形式为求函数u使对任意两端为零的连续可微函数φ都有

$$\int_0^1 u \frac{d\varphi}{dx} dx = -\int_0^1 f\varphi dx. \tag{3.2.5}$$

当u连续可微时，(3.2.5)的解u也满足 $\frac{du}{dx}=f$，但一般地来说，为

满足(3.2.5)只要 u 可积就可以了，不必连续可微，因此弱解不一定在通常的意义下满足方程。假设 u 是可积函数，如果存在可积函数 f 使对任意两端为零的函数 φ，(3.2.5)成立，则称 f 是 u 对 x 的弱导数。显然，若一个函数具有普通意义下的导数，必具有弱导数，具有弱导数却未必具有普通意义下的导数，因此弱导数是导数的推广。这种推广的方法也是先列举导数所具备的性质，选取其中主要的性质，将满足这个性质的函数叫作导数，这种推广的方法和第二章中推广长度、距离等概念，定义范数、距离的方法是一致的。下面我们给出弱导数的一般定义。

设 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 内无穷多次连续可微并在 Ω 的边界附近为零的函数的集合，显然 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数在边界 $\partial\Omega$ 附近的各阶导数都为零。假如函数 $f(x)$ 在 n 维 Euclid 空间 E^n 的任意有界闭集 S 上绝对可积，则称 $f(x)$ 在 E^n 上局部绝对可积。有了以上的术语，可以引进下述的定义。

定义 局部绝对可积函数 $f(x)$ 叫作 α 阶弱可微的，如果存在局部绝对可积的函数 $g(x)$ 使得对任意 $\phi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_\Omega g\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha\phi dx \qquad (3.2.6)$$

成立，$g(x)$ 叫作 $f(x)$ 的 α 阶弱导数，记以 $D^\alpha f = g$。记号 $\alpha, |\alpha|$ 和 D^α 请参看第二章 §2.2。

选择 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 有个好处，即 $\varphi(x)$ 在 $\partial\Omega$ 附近为零，各阶导数也为零，使得分部积分很简单。但有一个问题，由于解析函数在一个邻域内为零，必在整个空间恒等于零，那么是否存在不恒为零的无穷多次可微函数在 $\partial\Omega$ 附近为零呢？下面我们指出，这样的函数不仅存在而且很多。

令

$$j(x) = \begin{cases} r^{-1}\exp(-1/(1-|x|^2)), & \text{当 } |x|<1 \\ 0, & \text{当 } |x|\geq 1 \end{cases}$$

其中 $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$ 是常数，$|x| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$，可以验证

$j(x)$ 是 E^n 上无穷多次连续可微函数，并且当 $|x|>1$ 时恒为零，令

$$r=\int_{|x|\leq 1}\exp(-1/(1-|x|^2))dx,$$

则

$$\int_{E^n} j(x)dx=1.$$

设 x 是固定点，δ 充分小，令

$$j_\delta(x,x')=\delta^{-n}j\left(\frac{x-x'}{\delta}\right),$$

由于 $j_\delta(x,x')$ 对 x' 无穷多次连续可微，$|x-x'|>\delta$ 时，$j_\delta(x,x')=0$，所以 $j_\delta(x,x')\in C_0^\infty(E^n)$。由于

$$\int_{|x-x'|<\delta} j_\delta(x,x')dx'=1,$$

$$j_\delta(x,x')\geqslant 0,$$

所以由积分中值定理，对任意连续函数有

$$\int_{|x-x'|<\delta} j_\delta(x,x')u(x')dx'=$$

$$u(x^*)\int_{|x-x'|<\delta} j_\delta(x,x')dx'=u(x^*),$$

其中 x^* 是球 $S(x,\delta)$ 内的一点，x^* 依赖于 δ。令

$$u_\delta(x)=\int_\Omega j_\delta(x,x')u(x')dx', \tag{3.2.7}$$

由于 δ 充分小时，$S(x,\delta)\subset\Omega$，$j_\delta(x,x')$ 在 $S(x,\delta)$ 外为零，从而

$$\lim_{\delta\to 0}u_\delta(x)=\lim_{\delta\to 0}u(x^*)=u(x). \tag{3.2.8}$$

综合(3.2.7)与(3.2.8)并将极限移到积分号下就有

$$\iint_\Omega \lim_{\delta\to 0}j_\delta(x,x')u(x')dx'=u(x). \tag{3.2.9}$$

这里 $\lim\limits_{\delta\to 0}j_\delta(x,x')$ 实际上是 δ 函数。当 $x=0$ 时，这个式子与(3.1.11)一致。

对给定集合 S，若 $x_n\in S$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则 x 叫作 S 的极限点，

集合 S 连同它的所有极限点的集合叫作 S 的闭包，记以 $\bar{S}$. 使 $u(x)$ 不为零的所有 x 的集合的闭包叫作 $u(x)$ 的支集。令 Ω_δ 为 Ω 内与边界 $\partial\Omega$ 距离大于 δ 的点的集合，若 $u(x)$ 的支集包含在 Ω_δ 内，设 $x\in\partial\Omega$，则当 $x'\in\Omega_\delta$ 时，$j_\delta(x,x')=0$；当 $x'\in\Omega-\Omega_\delta$ 时，$u(x')=0$，因此由(3.2.7)可知，$u_\delta(x)=0$. 用同样方法可以证明 $u_\delta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$. 对任意 $u\in L^2(\Omega)$，我们可以找到支集包含在 Ω_δ 内的函数 $v(x)$ 并且取 δ 充分小使 $\|v(x)-u(x)\|_0^2=\iint\limits_\Omega(v(x)-u(x))^2dx$ 充分小，同时据上面所述，又可构造 $v_\delta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 使 $\|v_\delta(x)-v(x)\|_0^2$ 充分小，因此我们有

定理 3.2.1 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密.

这个定理的意思是说，对任意 $u\in L^2(\Omega)$，有 $u_n\in C_0^\infty(\Omega)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_\Omega(u_n-u)^2dx=0.$$

下面对弱导数再作些补充说明. 由于具有弱导数的函数属于 $L^2(\Omega)$，$L^2(\Omega)$ 中几乎处处相等的函数认为是彼此相等的。 在这个意义下，一个函数的弱导数是唯一的. 事实上，若 g_1 和 g_2 都是 f 的 α 阶弱导数，则对任意 $\phi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$\iint\limits_\Omega(g_1(x)-g_2(x))\phi(x)dx=0.$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，所以在 Ω 内 g_1 几乎处处等于 g_2.

在第二章 §2.4 中，我们给出 Sobolev 空间的一个定义，现在我们给出它的另一个定义.

定义 设 m 是非负整数，用 $H^m(\Omega)$ 表示使得所有满足 $0\leqslant|\alpha|\leqslant m$ 阶的弱导数都存在且属于 $L^2(\Omega)$ 的函数集合，给 $H^m(\Omega)$ 赋于内积和范数

$$(f,g)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\iint\limits_\Omega D^\alpha f\cdot D^\alpha g\,dx,$$

$$\|f\|_m^2 = (f,f)_m = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\iint_\Omega |D^\alpha f|^2 dx,$$

则 $H^m(\Omega)$ 叫作 m 阶 Sobolev 空间。

由于 $H^m(\Omega)$ 中的函数要求 $D^\alpha f\in L^2(\Omega)$，而不仅要求 $D^\alpha f$ 局部绝对可积，因此 $H^m(\Omega)$ 是具有 m 阶弱导数的函数集合的真子集，显然 $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$，并且有明显的包含关系

$$C^\infty(\bar{\Omega})\subset\cdots\subset H^{m+1}(\Omega)\subset H^m(\Omega)\subset\cdots\subset H^0(\Omega)=L^2(\Omega).$$

定理 3.2.2 $H_m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

证明 容易验证 $H^m(\Omega)$ 是内积空间. 为了证明完备性，设 $\{f_i(x)\}$ 是 $H^m(\Omega)$ 中的基本序列，则对 $|\alpha|\leqslant m$，

$$\|D^\alpha f_i - D^\alpha f_k\|_0^2 = \int_\Omega |D^\alpha f_i - D^\alpha f_k|^2 dx$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha f_i - D^\alpha f_k|^2 dx = \|f_i - f_k\|_m^2,$$

因此 $\{D^\alpha f_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的基本序列，由于 $L^2(\Omega)$ 是完备的，所以 $\{D^\alpha f_i\}$ 收敛。假设极限为 $f^{(\alpha)}$，则对任意 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$(f^{(0)},D^\alpha\phi)_0 = \lim_{j\to\infty}(f_j,D^\alpha\phi)_0 = (-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}(D^\alpha f_j,\phi)_0$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f^{(\alpha)},\phi)_0.$$

从而对任意满足 $|\alpha|\leqslant m$ 的 α，$f^{(0)}$ 有弱导数 $D^\alpha f^{(0)} = f^{(\alpha)}$，因此 $f^{(0)}(x)\in H^m(\Omega)$，并且

$$\|f_j - f^{(0)}\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f^{(0)}|^2 dx.$$

所以按范数 $\|\ \ \|_m$，$f_j\to f^{(0)}$，这就证明了 $\{f_j\}$ 在 $H^m(\Omega)$ 中有极限，从而证明了完备性，亦即 $H^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

在第二章 §2.4 中，我们曾用完备化的方法给出 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$ 的定义，自然要问这两个定义是否等价？从实变函数理论中可以知道，光滑函数集合 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密，亦即当 $m=0$ 时，$C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包就是 $H^m(\Omega)$ 自己. 这个结果对任意正整数 m 也是正确的，亦即有下述的定理.

定理 3.2.3 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $\|\ \ \|_m$ 意义下的闭包是 $H^m(\Omega)$.

定理 3.2.3 表明，关于 $H^m(\Omega)$ 的两种定义是等价的。下面讨论空间 $H_0^m(\Omega)$.

定义 $C_0^\infty(\Omega)$在 $\|\ \|_m$ 意义下的闭包记以 $H_0^m(\Omega)$. $H_0^m(\Omega)$ 也叫作 m 阶 Sobolev 空间。

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上为零，$H_0^m(\Omega)$ 中的函数是 $C_0^\infty(\Omega)$中函数在范数 $\|\ \|_m$ 意义下的极限，自然要问 $H_0^m(\Omega)$ 中的函数是否也在 $\partial\Omega$ 上为零？先考虑 $m=0$ 的情形，这时 $H_0^m(\Omega)\subset L^2(\Omega)$，但 $L^2(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上的值是不确定的，它的值可以任意改变。当 $m=1$ 时，情况不同，考虑上半空间

$$E_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,|\,x_n\geqslant 0\}.$$

令 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$，设 $\varphi(x)=\varphi(x',x_n)\in H^1(E_+^n)$，由于 $\varphi^2(x)$ 在 E_+^n 上可积，显然 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi(x)=0$，因此 $|\varphi(x',0)|^2$ 可以写成

$$|\varphi(x',0)|^2=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_n}|\varphi(x',x_n)|^2dx_n,$$

将这个恒等式在超平面 $x_n=0$ 上对 x' 积分并利用 Schwarz 不等式，就有

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L^2(E^{n-1})}\leqslant\left|\int_{E_+^n}2\varphi(x',x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(x',x_n)dx\right|$$

$$\leqslant 2\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right\|_{L^2(E_+^n)}\|\varphi\|_{L^2(E_+^n)}.$$

利用不等式 $2ab\leqslant a^2+b^2$ 给出估计

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^2_{L^2(E^{n-1})}\leqslant\|\varphi\|^2_{L^2(E_+^n)}$$

$$+\left\|\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi\right\|^2_{L^2(E_+^n)},$$

这个式子可以写成

$$\|\varphi(x)\|^2_{L^2(\partial E_+^n)}\leqslant\|\varphi(x)\|^2_{H^1(E_+^n)}. \qquad (3.2.10)$$

由这个不等式可知，当 $\varphi\in H^1(E_+^n)$ 时，$\varphi|_{\partial\Omega}$ 的值在几乎处处相

等的意义下是唯一确定的．事实上令 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，若 $\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^1(E_+^n)}=0$。由 (3.2.10) 可知，在 ∂E_+^n 上 φ_1 几乎处处等于 φ_2，从而边值由内部的值唯一确定．类似地可以推出，若 $u(x)\in H^m(E_+^n)$，则 $u(x)$ 本身连同其前 $m-1$ 阶导数的边值都是唯一确定的．可以证明，这个结果可以推广到一般区域 Ω，亦即有仅依赖域 Ω 的常数 $C(\Omega)$ 存在，使得对任意 $u\in H^1(\Omega)$ 恒有

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\leqslant C(\Omega)\|u\|_{1,\Omega}, \tag{3.2.11}$$

这里 $\|u\|_{1,\Omega}=\|u\|_{H^1(\Omega)}$。由于这个不等式及 $H_0^1(\Omega)$ 中的函数是 $C_0^\infty(\Omega)$ 中函数按范数 $\|\ \ \|_1$ 意义的极限，从而 $H_0^1(\Omega)$ 中函数的边值为零，因此

$$H_0^1(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega);u|_{\partial\Omega}=0\}. \tag{3.2.12}$$

由这个不等式可以推出

$$H_0^2(\Omega)=\left\{u\in H^2(\Omega);\ u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0\right\}. \tag{3.2.13}$$

由于 $u|_{\partial\Omega}=0$，u 的切向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{\partial\Omega}=0$，从而 u 本身和它的各个一阶导数在 $\partial\Omega$ 上都为零．更一般地

$$H_0^m(\Omega)=\left\{u\in H^m(\Omega);u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\cdots=\left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\right|_{\partial\Omega}=0\right\}. \tag{3.2.14}$$

正因为 $H_0^m(\Omega)$ 有这个性质，所以它是研究齐次第一边值问题的合适空间，这与第二章 §2.4 是一致的．

设 f 定义在 Ω 上，定义 f 在 Ω' 上的扩张如下：当 $x\in\Omega$ 时，f 的定义不变；当 $x\in\Omega'-\Omega$ 时，f 的值为零．把这种扩张叫作 f 在 Ω' 上的零扩张．从直观上不难看出下述的定理

定理 3.2.4 设 Ω,Ω' 是开集，$\Omega'\supset\Omega$，则有

(1) 若 $f\in H_0^m(\Omega)$ 是 f 在 Ω' 的零扩张，则 $f\in H_0^m(\Omega')$，在这个意义上说，$H_0^m(\Omega)\subset H_0^m(\Omega')$．

(2) 若 $f\in H_0^m(\Omega')$ 且 f 在 Ω 内有紧支集，则 f 在 Ω 上的限制

$f \in H_0^m(\Omega)$.

证明 (1) 若 $\{\phi_i\}$是 $C_0^\infty(\Omega)$中序列，按范数 $\| \ \|_m$，$\phi_i \to f$，显然 ϕ_i 在 Ω' 上的零扩张属于 $C_0^\infty(\Omega')$，并且 $\{\phi_i\}$ 是 $H_0^m(\Omega')$ 中的基本序列，这就证明了(1)。

(2) 若 $f \in H_0^m(\Omega')$ 且 f 的支集包含在Ω内，显然 f 在 $\Omega' - \Omega$ 上为零，容易相信 $f \in H_0^m(\Omega)$. 证明从略。

由这个定理可知，$H_0^m(\Omega)$ 中的函数可以用零延拓扩张到整个空间，因此可以进行 Fourier 变换，从而 Fourier 变换成为研究 $H_0^m(\Omega)$的重要工具。下一定理表明，若$f(x) \in H_0^m(\Omega)$，将 f 用零扩张到整个空间 E^n，则 $f(x)$ 的 Fourier 变换$F(s)$在无穷远处趋于零。

定理 3.2.5 假设 $f \in H_0^m(\Omega)$ 并将 f 用零延拓到整个 E^n，则对 $|\alpha| \leqslant m$

$$\widehat{(D^\alpha f)}(\xi) = (-i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(E^n), \quad (3.2.15)$$

并且

$$\|f\|_m^2 = \int_{E^n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.2.16)$$

证明 对 $f \in C_0^\infty(\Omega)$，由 §3.1 给出的 Fourier 变换的性质7即可得到(3.2.15)，这是因为 f 可以用零延拓到整个空间 E^n，从而可以进行 Fourier 变换。由于 $C_0^\infty(E^n)$ 在 $L^2(E^n)$ 中稠密，所以(3.2.15)成立。由$\| \ \|_m$ 的定义和 Parseval 恒等式(参见 §3.1 Fourier 变换的性质 9，即(3.2.16))。

我们一再强调紧性的重要，除了引进弱收敛重新获得紧性以外，还有一些其它的得到紧性的方法。首先回顾分析中的 Arzela-Ascoli 定理：

若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界且同等连续，则 $\{f_n(x)\}$ 有一致收敛的子列。

若 $f_n(x)$ 可微，则 $f_n(x)$ 同等连续的条件可以用条件$\{f_n'(x)\}$一致有界来代替。这时这个定理可以写成："若 $\{f_n(x)\}$ 和

$\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界，则 $\{f_n(x)\}$ 有一致收敛的子序列”。

用泛函分析的术语来说，令 $\|f\|_{C^1[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$，$\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$。这个定理是指若 $\{f_n(x)\}$ 按 $C^1[a,b]$ 的范数是有界集，则 $\{f_n(x)\}$ 按 $C[a,b]$ 的范数有一致收敛的子序列。注意 $\{f_n(x)\}$ 是同样一个集合，按 $C^1[a,b]$ 范数是有界集，按 $C[a, b]$ 范数是紧致集。这里 $\{f_n(x)\}$ 不变，但 $\{f_n(x)\}$ 所属于的空间变了，将 $f\in C^1[a, b]$ 变到 $f\in C[a,b]$ 的算子叫作从 $C^1[a,b]$ 到 $C[a, b]$ 的嵌入算子，这个嵌入算子把 $C^1[a,b]$ 中的有界集变成 $C[a,b]$ 中的紧致集，因此从 $C^1[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的嵌入算子是紧算子。

这里要注意，同一个函数集合，由于衡量集合的尺度不同，集合就有不同的性质。一般地，若 $m > k$，按 $C^m[a, b]$ 范数的有界集，按 $C^k[a,b]$ 的范数就是紧致集，从 $C^m[a,b]$ 到 $C^k[a,b]$ 的嵌入算子是紧算子。这里再一次强调，嵌入算子不改变元素本身，只改变元素所隶属的空间。隶属的空间变了，衡量它的尺度变了，元素所具有的性质也随之改变。正如同一个音乐知识平平的人可能是一个优秀的科学家，衡量事物的标准变了，事物的价值也随之改变。$C^m[a,b]$ 中的有界集合，按 $C^k[a, b]$ 的范数来看就具有紧性，所谓嵌入就是把 $C^m[a,b]$ 中的元素看成 $C^k[a,b]$ 中的元素。Arzela-Ascoli 定理断定，从 $C^m[a,b]$ 到 $C^k[a,b]$ 的嵌入算子是紧算子。由于 $H^m(\Omega)$ 是 $C^m(\Omega)$ 的推广，我们自然要问，当 $m > k$ 时，从 $H^m(\Omega)$ 到 $H^k(\Omega)$ 的嵌入算子是否是紧算子，回答是肯定的，对空间 $H_0^m(\Omega)$ 有下述结果。

定理 3.2.6 （Rellich 嵌入定理）设 Ω 是有界开集，m，k 是非负整数，$m > k$，则从 $H_0^m(\Omega)$ 到 $H_0^k(\Omega)$ 的嵌入算子是紧算子。

证明 只需证明 $H_0^m(\Omega)$ 中的闭单位球内的任意序列 $\{f_i\}$ 在 $\|\cdot\|_k$ 意义下有收敛子列。由第二章定理 2.3.5，Hilbert 空间中的

闭单位球弱紧致，即序列 $\{f_i\}$ 有弱收敛的子序列，这个子序列仍用 $\{f_i\}$ 表示，记其极限为 f，显然 $\|f\|_m \leqslant 1$. 由于当 $0 \leqslant k \leqslant m$ 时，从 $H_0^m(\Omega)$ 到 $H_0^k(\Omega)$ 的嵌入算子是连续的，因此 $H_0^k(\Omega)$上的任意连续线性泛函都是 $H_0^m(\Omega)$ 上的连续线性泛函，从而序列 $\{f_i\}$ 在 $H_0^k(\Omega)$ 中弱收敛于 f. 为了证明$\{f_i\}$按范数 $\|\ \ \|_k$ 收敛于 f，由第二章定理 2.3.6，只需证明 $\|f_i\|_k \to \|f\|_k$ 事实上

$$\|f_i - f\|_k^2 = (f_i - f, f_i - f)_k$$
$$= \|f_i\|_k^2 - (f_i, f)_k - (f, f_i)_k + \|f\|_k^2. \quad (3.2.17)$$

$(f_i, f)_k$ 可以看作 $H_0^k(\Omega)$ 上的连续线性泛函，由于 f_n 弱收敛于 f，因此当 $n \to \infty$ 时，$(f_i, f)_k \to (f, f)_k$. 因此只要证明了当 $i \to \infty$ 时，$\|f_i\|_k \to \|f\|_k$，就证明了 $\|f_i - f\|_k^2 \to 0$.

以下证明当 $i \to \infty$ 时，$\|f_i\|_k \to \|f\|_k$. 将 f_i, f 用零扩张到 E^n，由于在 $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ 中 f_i 弱收敛于 f，f_i 的 Fourier 变换 $\hat{f}_i(\xi)$ 可以看成关于 f_i 的线性连续泛函，因此 $\hat{f}_i(\xi) \to \hat{f}(\xi)$，从而对每个 ξ 有

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_i(\xi)|^2 \to \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2. \quad (3.2.18)$$

由 Schwarz 不等式，得 $|\hat{f}_i(\xi)| < C$，C 是仅依赖 Ω 的常数. 因此对任意实数 $\tau < \infty$，当 $|\xi| \leqslant \tau$ 时，(3.2.18)的每一项都小于一个常数，由实变函数论中的控制收敛定理，可知

$$\lim_{i\to\infty} \int_{|\xi| \leqslant \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_i(\xi)|^2 d\xi$$
$$= \int_{|\xi| \leqslant \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi|^\alpha |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (3.2.19)$$

由(3.2.16)，这差不多就是要证明的，只要证明 $|\xi| > \tau$ 部分的积分很小就可以了. 取任意 $\varepsilon > 0$，由 $m > k$，有 $\tau > 0$ 使

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 / \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 < \varepsilon, \ |\xi| \geqslant \tau. \quad (3.2.20)$$

由定理 3.2.5，$\xi^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(E^n)$. 当 $|\alpha| \leqslant m$ 时，有

$$\int_{|\xi| > \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi - \int_{|\xi| > \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2$$

$$\times \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 / \sum_{|\alpha| \leqslant m} |\xi^\alpha|^2 \right\} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant \varepsilon \|f\|_m^2 \leqslant \varepsilon, \tag{3.2.21}$$

这里第一个不等式用(3.2.20)和(3.2.16)得到。用类似的方法可以证明，用 $\hat{f}_i(\xi)$ 替换 $\hat{f}(\xi)$ 时，(3.2.21) 仍然成立。由(3.2.19)可知，存在 n_0 使当 $i > n_0$ 时，有

$$\left| \int_{|\xi| \leqslant \tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 \{ |\hat{f}_i(\xi)|^2 - |\hat{f}(\xi)|^2 \} d\xi \right| < \varepsilon,$$

因此当 $i > n_0$ 时，有

$$\left| \|f_i\|_k^2 - \|f\|_k^2 \right| = \int_{E^n} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 \{ |\hat{f}_i(\xi)|^2 - |\hat{f}(\xi)|^2 \} d\xi \leqslant 3\varepsilon,$$

这里用到将 E^n 分成球 $\bar{S}(0, \tau)$ 内和 $\bar{S}(0, \tau)$ 外两部分估计、最后一个不等式及不等式(3.2.21)。这就证明了

$$\lim_{i \to \infty} \|f_i\|_k = \|f\|_k.$$

定理得证。

这个定理的完整叙述和证明可以参看 Lions 与 Magnes: "Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications" Volume 1. 1972 p.72.

作为 Rellich 嵌入定理的应用，我们来证明不等式(2.4.28)，亦即(1)若 $B(u)$ 是 $H^k(\Omega)$ 上的非负连续泛函；(2)若 $B(u) = 0$，$|u|_{k,\Omega} = 0$，则 $u = 0$；(3) 对任意实数 λ，$B(\lambda u) = \lambda^2 B(u)$. 则有正数 C 使得对任意 $u \in H^k(\Omega)$ 都有

$$|u|_{k,\Omega}^2 + B(u) \geqslant C \|u\|_{k,\Omega}^2. \tag{2.4.28}$$

证明 假设 (2.4.28) 不成立，则对任意小的正数 C 都有 $u \in H^k(\Omega)$ 使(2.4.28)不成立，从而有 $w_n \in H^k(\Omega)$ 使

$$|w_n|_{k,\Omega}^2 + B(w_n) < \frac{1}{n} \|w_n\|_{k,\Omega}^2$$

亦即

$$\|w_n\|_{k,\Omega}^2 > n(|w_n|_{k,\Omega}^2 + (Bw_n)),$$

令 $u_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{k,\Omega}}$，由假设(3)可知

$$\|u_n\|_{k,\Omega}^2 > n(|u_n|_{k,\Omega}^2 + B(u_n)),$$

由于 $\|u_n\|_{k,\Omega} = 1$，$|u_n|_{k,\Omega}$ 和 $B(u_n)$ 是非负的，从而 $n \to \infty$ 时，$|u_n|_{k,\Omega} \to 0, B(u_n) \to 0$。由于 $\{u_n\}$ 在 $H^k(\Omega)$ 中有界，由 Rellich 嵌入定理可知，必有在 $H^{k-1}(\Omega)$ 中的收敛子列(定理 3.2.7)，仍记这个序列为 $\{u_n\}$，显然 $\{u_n\}$ 在 $H^{k-1}(\Omega)$ 中是基本序列。由于 $\|u\|_{k,\Omega}^2 = |u|_{k,\Omega}^2 + \|u\|_{k-1,\Omega}^2$，$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n|_{k,\Omega}^2 = 0$，因此 $\{u_n\}$ 也是 $H^k(\Omega)$ 中的基本序列。由于 $H^k(\Omega)$ 是完备的，从而必存在 $u_0 \in H^k(\Omega)$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\|u_n - u_0\|_{k,\Omega} \to 0$。由 $\|u_n\|_{k,\Omega} = 1$ 可知，$\|u_0\|_{k,\Omega} = 1$。另一方面由 $|u_n|_{k,\Omega} \to 0$，$B(u_n) \to 0$ 以及 $B(u)$ 的连续性可知，$|u_0|_{k,\Omega} = 0$，$B(u_0) = 0$。再由关于 $B(u)$ 的假设(2)可知，$u_0 = 0$，这与 $\|u_0\|_{k,\Omega} = 1$ 矛盾。命题得证。

(2.4.28)是个重要的不等式，从这个不等式的证明过程，可以看到 Rellich 嵌入定理的重要作用。

前面介绍了 Rellich 嵌入定理，下面介绍苏联数学家 S. L. Sobolev 于 1938 年给出的 Sobolev 嵌入定理。

按照 Sobolev 空间范数的收敛是函数连同其各阶导数的均方收敛。一般地说，在有界域上由一致收敛能推出均方收敛，由均方收敛推不出一致收敛。但在一维情形由函数和一阶导数的均方收敛能推出函数的一致收敛。事实上设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在区间 $[0, 1]$ 上的连续可微函数序列，$f_n(0) = 0$，显然，$f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)dt$，于是

$$\max_{0\le x\le 1} |f_n(x)| = \max_{0\le x\le 1} \left|\int_0^x f_n'(t)dt\right|$$
$$\le \max_{0\le x\le 1} \int_0^x |f_n'(t)|\,dt \le \left[\int_0^1 |f_n'(t)|^2 dt\right]^{1/2},$$

由此可知，从 $f_n'(t)$ 的均方收敛可以推出 $f_n(t)$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛，或者说按 $\|\ \ \|_1$ 范数收敛能推出一致收敛。在 n 维情形，设 Ω

是有界域，取Ω内任意一点P作为坐标原点，r表示点到P点的距离. 取ρ充分大，使Ω完全包含在以P为心，ρ为半径的球内，$f\in C_0^\infty(\Omega)$，取坐标系为n维球坐标，由$f(\rho)=0$可知(这里假定f在Ω外为零)

$$f(P)=-\int_0^\rho \frac{\partial f}{\partial r}dr=-r\frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r=0}^{r=\rho}+\int_0^\rho rd\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$=\int_0^\rho r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}dr.$$

继续分部积分可以得到

$$f(P)=b\int_0^\rho r^{m-1}\frac{\partial^m f}{\partial r^m}dr,$$

这里b是仅依赖m的常数. 沿球面$S(P,\rho)$对角度积分有

$$f(P)=b'\int_{S(P,\rho)} r^{m-n}\frac{\partial^m f}{\partial r^m}dx,$$

这里x是体积元，b'是仅依赖m和n的常数，r^{m-n}的出现是由于在球坐标系中dx的$J_a c_0 b_i$行列式中含有r^{n-1}. 由Schwarz不等式可知

$$|f(P)|^2\leqslant b'^2\int_{S(P,\rho)} r^{2(m-n)}dx\int_{S(P,\rho)}\left|\frac{\partial^m f}{\partial r^m}\right|^2 dx,$$

右端第一个积分当$m>\frac{1}{2}n$时是收敛的，它的值仅依赖于m,n和Ω. 第二个积分的值不超过$\|f\|_m^2$，从而

$$|f(P)|\leqslant C\|f\|_m.$$

由于P是Ω内任意一点，C与P无关. 因此有

$$\max_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant C\|f\|_m, \tag{3.2.22}$$

这里C是仅依赖m、n和Ω的常数.

设$f\in H_0^m(\Omega)$，则有$f_i\in C_0^\infty(\Omega)$，使$\lim_{i\to\infty}\|f_i-f\|_m=0$. 当$m>\frac{n}{2}$时，由(3.2.22)可知，$f_i$一致收敛于$f$，从而$f$是连续函

数.类似地可以证明,若m和k是正整数,$m-k>\frac{n}{2}$,$f\in H_0^m(\Omega)$,则 $f\in C^k(\Omega)$. 综合上述可以得到

定理 3.2.7 (Sobolev嵌入定理) 设Ω是有界开集,k是小于$m-\frac{1}{2}n$的整数. 如果$f\in H_0^m(\Omega)$或 $H^m(\Omega)$, 则 $f\in C^k(\bar{\Omega})$, 并且从 $H_0^m(\Omega)$ 或 $H^m(\Omega)$ 到$C^k(\Omega)$的嵌入算子是连续的.

§ 3.3 Sobolev 空间与变分问题

Sobolev 空间实际上是一种以能量为长度的空间.有了 Sobolev 空间, 我们就可以把第二章§ 2.4中所讲的弹性力学中的变分问题化为几何问题,即在集合S中找一点u与给定元素σf距离最短. 如果 $\sigma f\in S$,显然 $u=\sigma f$; 如果 $\sigma f\notin S$,S是一条直线 (更一般地是个超平面),则u是σf在这条直线(超平面)上的投影;如果S是直线上的一个有界闭区间(更一般地是个有界闭凸集), 当 $v\in$

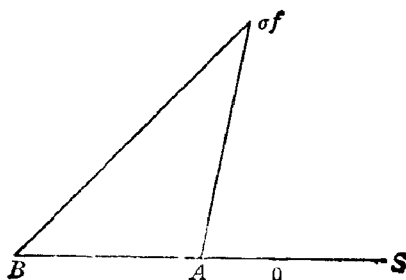


图 3.3.1

$[A,B]$时,σf 与A点距离最短.如图 3.3.1 所示向量 $\overrightarrow{\sigma fA}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角是钝角, 将A用u表示, 将B用v表示, 则对任意 $v\in S$

$$(\sigma f - u, v - u) \leqslant 0, \tag{3.3.1}$$

亦即

$$(u, v - u) \geqslant (\sigma f, v - u). \tag{3.3.2}$$

下面我们对由几何直观猜得的结果给以严格的数学论述.

由第二章 §2.4 可知，弹性力学中的许多问题可化为下述极小化问题：求 $u \in U$ 使

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v), \tag{3.3.3}$$

这里允许元素集合 U 是 Hilbert 空间 H 的闭凸子集，能量 J 形如

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v), \tag{3.3.4}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称双线性形式，亦即 $a(u,v) = a(v,u)$，$a(u,v)$ 对 u 和 v 分别是线性的，f 是空间 H 上的连续线性泛函.

下面我们先考虑更一般的问题. 设 V 是线性赋范空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是从 $V \times V$ 到 R 的双连续线性泛函，f 是从 V 到 R 的连续线性泛函，R 是实数集合，U 是 V 的非空子集. 考虑下述极小化问题：求 $u \in U$ 使

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v), \tag{3.3.5}$$

其中泛函 $J: V \to R$ 定义为

$$J: v \in V \to J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v). \tag{3.3.6}$$

定理 3.3.1 假设

(1) V 是 Hilbert 空间；

(2) U 是 V 的闭凸子集；

(3) 双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 对称且在 V 上正定，正定的意义是存在常数 $C > 0$ 使对任意 $v \in V$

$$a(v, v) \geqslant C\|v\|^2, \tag{3.3.7}$$

在上述假设下，极小化问题(3.3.5)有且仅有一解.

证明 对空间 V 赋以内积 $a(\cdot,\cdot)$，由 $a(\cdot,\cdot)$ 所定义的范

数与原来的范数是等价的，因此 V 成为 Hilbert 空间，由 Riesz 表现定理，存在唯一的 $\sigma f \in V$ 使对 $\forall v \in V$

$$f(v) = a(\sigma f, v),$$

由于双线性形式的对称性，可以将泛函改写成

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - a(\sigma f, v)$$

$$= \frac{1}{2} a(v - \sigma f, v - \sigma f) - \frac{1}{2} a(\sigma f, \sigma f).$$

注意 $a(\cdot,\cdot)$ 是所定义的范数，因此极小化问题变成求 σf 与集合 U 之间的最短距离。而求解问题变成求 σf 按内积 $a(\cdot,\cdot)$ 在 U 上的投影，这就将分析问题化成几何问题。由于 U 是空间 V 的闭凸子集，这种投影存在而且唯一，这就证明了这个定理。

容易看出这个定理与第二章 §2.4 所述的结果本质上是相通的。以不等式(3.3.2)为背景我们可以得到

定理 3.3.2 u 是极小化问题(3.3.5)的解当且仅当 u 满足

$$u \in U, \text{ 且 } \forall v \in U, \ a(u, v-u) \geq f(v-u). \tag{3.3.8}$$

更准确地说，若 U 是顶点为 0 的闭凸集，则

$$u \in U \text{ 且 } \forall v \in U, \ a(u, v) \geq f(v), \ a(u, u) = f(u). \tag{3.3.9}$$

若 U 是闭子空间，则

$$u \in U \text{ 且 } \forall v \in U, \ a(u, v) = f(v). \tag{3.3.10}$$

证明可以参看 Ciarlet [50].

下面设 H 是 Hilbert 空间，$U = H$，这时极小化问题(3.3.5)归结为问题(3.3.10)。在假定 $a(\cdot,\cdot)$ 对称的情形，问题(3.3.10)的解存在且唯一，这个结果可以推广到 $a(\cdot,\cdot)$ 非对称的情形，这就是下述的 Lax-Milgram 引理。

定理 3.3.3 (Lax-Milgram 引理) 设 H 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot): H \times H \to R$ 是连续双线性正定泛函，$f: V \to R$ 是连续线性泛函，则问题

$$\forall v \in V, \ a(u, v) = f(v), \ u \in U \tag{3.3.11}$$

有且仅有一解。

证明见 Ciarlet[50] 或第八章。

Sobolev 空间是以能量为长度的空间，是描述势能最小原理的合适工具。第二章 §2.4 中所叙述的变分理论都可以用 Sobolev 空间的术语来描绘。记

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2},$$

Friedrichs 不等式(2.4.14)可以写成：存在常数 $C(\Omega)$ 使得

$$|v|_{0,\Omega} \leqslant C(\Omega)|v|_{1,\Omega}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3.12}$$

下面我们举例说明 Sobolev 空间理论的应用。

例 3.3.1 设 $H = U = H_0^1(\Omega), a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + auv \right) dx, f(v) = \int_\Omega fv dx$，$a \in C(\Omega)$，$a \geqslant 0$，$f \in L^2(\Omega)$。

可以验证 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称双线性的连续泛函，事实上

$$|a(u,v)| \leqslant \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{0,\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{0,\Omega} + \max_{x \in \Omega} |a(x)| \, |u|_{0,\Omega} |v|_{0,\Omega}$$

$$\leqslant \max\{1, \max_{x \in \Omega} |a(x)|\} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega},$$

其中 $|\cdot|_{0,\Omega}$ 表示 $L^2(\Omega)$ 的范数，从而 $a(u,v)$ 是连续的。又由于对所有 $v \in H^1(\Omega)$，

$$a(v,v) \geqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = |v|_{1,\Omega}^2$$

及 Friedrichs 不等式，所以 $a(u,v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是正定的。对所有 $v \in H^1(\Omega)$，有

$$|f(v)| \leqslant |f|_{0,\Omega} |v|_{0,\Omega} \leqslant |f|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}.$$

因此由定理 3.3.1，存在唯一泛函 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使空间 $H_0^1(\Omega)$ 上的泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2+av^2\right\}dx-\int_{\Omega}fvdx \qquad (3.3.13)$$

取最小值. 由定理 3.3.2，它对 $\forall v\in H_0^1(\Omega)$ 满足变分方程

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+auv\right\}dx=\int_{\Omega}fvdx, \qquad (3.3.14)$$

利用分部积分法可以证明它相当于求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 在弱形式意义下满足方程

$$-\Delta u+au=f,\ 在\ \Omega\ 内. \qquad (3.3.15)$$

由(3.2.12)可知，空间 $H_0^1(\Omega)$ 的函数在边界 $\partial\Omega$ 上为零，因此(2.3.15)相当于下述齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u+au=f,\ 在\ \Omega\ 内,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \qquad (3.3.16)$$

严格地说，(2.3.16)的解要求在 Ω 内两次连续可微，(2.3.15)的解只是属于 $H_0^1(\Omega)$，由定理 3.3.1 可知 (2.3.15) 解的存在性. 虽然(2.3.15)的解未必是(2.3.16)的解，但是可以证明，如果 f 充分光滑，可以证明(2.3.15)的解也是(2.3.16)的解.

例 3.3.2 设 $H=U=H^1(\Omega)$, $a(u,v)=\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+auv\right)dx$, $f(v)=\int_{\Omega}fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds$, $a\in C(\Omega)$, 在 Ω 上 $a\geqslant a_0>0$, $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\partial\Omega)$.

由于对任意 $v\in H^1(\Omega)$, $a(v,v)\geqslant\min\{1,a_0\}\|v\|_{1,\Omega}^2$，从而双线性泛函 $a(u,v)$ 在 $H^1(\Omega)$ 上是正定的. 由不等式 (3.2.11) 及 Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega}gvds\right| &\leqslant \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}\\ &\leqslant C(\Omega)\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

因此存在唯一函数 $u\in H^1(\Omega)$ 使泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2+av^2\right\}dx$$

$$-\int_{\Omega} fv dx - \int_{\partial\Omega} gv ds. \tag{3.3.17}$$

在 $H^1(\Omega)$ 上取最小，或者等价地使

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + auv\right\} dx$$

$$= \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.3.18}$$

利用分部积分法可以证明它相当于求 u 满足

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (-\Delta u + au) v dx$$

$$= a(u,v) - \int_{\partial\Omega} gv ds,$$

总之它相当于求 $u \in H^1(\Omega)$ 在弱意义下满足

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f, \\ \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (-\Delta u + au) v dx = a(u,v) - \int_{\partial\Omega} gv ds. \end{cases} \tag{3.3.19}$$

(3.3.19) 的第二个等式相当于边界条件。如果 $u \in H^2(\Omega)$，用 Green 公式可以证明

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (-\Delta u + au) v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$= \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds, \text{任意 } v \in H^1(\Omega). \tag{3.3.20}$$

综合(3.3.19)与(3.3.20)可得

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega} gv ds, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.3.21}$$

由此可以推出在 $\partial\Omega$ 上 $\frac{\partial u}{\partial n} = g$。显然相应的边值问题为

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f, \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g. \end{cases} \tag{3.3.22}$$

当 $g \neq 0$ 时，它叫作方程 $-\Delta u + au = f$ 的非齐次 Neumann 问

题，若 $g=0$，则叫作这个方程的齐次 Neumann 问题。

例 3.3.5 取 $H=U=\{v\in H^1(\Omega),\ v=0$ 在 $\partial\Omega_1$ 上$\}$，

$$a(u,v)=\iint\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+auv\right\}dx, \tag{3.3.23}$$

$$f(v)=\iint\limits_{\Omega}fvdx+\int_{\partial\Omega_2}gvds,$$

其中 $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，$\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2=\phi$，$\phi$ 为空集，$a_{ij}\in C(\Omega)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$a\in C(\Omega)$，$a\geqslant 0$，$f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\partial\Omega_2)$。

$\exists\beta>0$，使 $\forall\xi_i(1\leqslant i\leqslant n)$，在$\Omega$上，有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\beta\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2. \tag{3.3.24}$$

为了证明双线性泛函 $a(u,v)$ 的正定性，我们先证明下述的定理。

定理 3.3.4 设Ω是n维 Euclid 空间 E^n 中的连通有界开子集，则由(3.3.23)定义的空间H是 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间。若 $\partial\Omega_1$ 的测度不为零，则H上的半范数$|\cdot|_{1,\Omega}$ 与范数$\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 等价。

证明 设 $\{v_k\}$ 是空间H中收敛于 $v\in H^1(\Omega)$ 的函数序列，由不等式 (3.2.11) 可知，v_k 的边值按 $L^2(\partial\Omega)$ 的范数收敛于 v 的边值。再由于 $v_k|_{\partial\Omega_1}=0$，因此 v 在 $\partial\Omega_1$ 上几乎处处等于零，从而 $v\in H$，亦即H是 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间。

其次我们将证明 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 是空间H的范数。设 v 是空间H中满足 $|v|_{1,\Omega}=0$ 的函数，我们要证明 $v=0$。事实上由$|v|_{1,\Omega}=0$ 以及Ω是连通集可得，v必定是个常数，从而v的边值也是一个常数。由于 $v|_{\partial\Omega_1}=0$，从而v在Ω上恒等于零，亦即 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 是个范数。

现在我们证明范数 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 与 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 是等价范数。

所谓这两个范数等价就是存在与 $v\in H$ 无关的常数 C_1 和 C_2，使对任意 $v\in H$ 恒有

$$C_1|v|_{1,\Omega}\leqslant\|v\|_{1,\Omega}\leqslant C_2|v|_{1,\Omega}. \tag{3.3.25}$$

由于 $|v|_{1,\Omega} \leqslant \|v\|_{1,\Omega}$，第一个不等式显然成立，因此只需证明第二个不等式成立．如果这个不等式不成立，则对任意大的 C_2（例如取 C_2 为正整数 k）都有 $v_k \in H$ 使 $\|v_k\|_{1,\Omega} > k|v_k|_{1,\Omega}$，从而存在序列 $\{v_k\}$ 使 $v_k \in H$，$\|v_k\|_{1,\Omega} = 1$，$\lim\limits_{k\to\infty}|v_k|_{1,\Omega} = 0$．这只要注意

$$\left|\frac{v_k}{\|v_k\|}\right|_{1,\Omega} < \frac{1}{k},$$

并取 $\dfrac{v_k}{\|v\|_k}$ 当作 v_k 就可以了．由 Rellich 嵌入定理 3.2.6 可知，$H^1(\Omega)$ 中的任意有界序列包含一个在 $L^2(\Omega)$ 中收敛的子序列，从而存在 H 中的序列 $\{v_l\}$ 使 $\{v_l\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛，且 $\lim\limits_{l\to\infty}|v_l|_{1,\Omega} = 0$．因此 $\{v_l\}$ 是 H 中的基本序列，再由 H 的完备性可知，存在 $v \in H$ 使 $\{v_l\}$ 按范数 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 收敛于 v．由于 $|v|_{1,\Omega} = \lim\limits_{l\to\infty}|v_l|_{1,\Omega} = 0$，从而 $v = 0$，这与对任意 k，$\|v_k\|_{1,\Omega} = 1$ 矛盾．因此不等式 (3.2.5) 成立，亦即 $|\ \ |_{1,\Omega}$ 与 $\|\ \ \|_{1,\Omega}$ 是等价范数，定理证毕．

由(3.3.24)可知，对任意 $v \in H^1(\Omega)$，$a(v,v) \geqslant \beta|v|^2_{1,\Omega}$．再由本定理可知双线性形式

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + auv\right\}dx \qquad (3.3.26)$$

是正定的．

由 Lax-Milgram 定理（定理3.3.3）可知，存在唯一的函数 $u \in H$ 满足变分方程

$$\int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + auv\right\}dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega_2} gv\,ds,\quad \forall v \in H. \qquad (3.3.27)$$

由 Green 公式

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega} uv\cos(n,x_i)ds$$

$$-\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx, \tag{3.3.28}$$

可以得到另外一个 Green 公式

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) ds$$

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v dx, \tag{3.3.29}$$

其中 $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, a_{ij} 是充分光滑的函数，使函数 $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}$属于空间$H^1(\Omega)$.利用(3.3.29),我们有下述可解的边值问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + au = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \\ u|_{\partial\Omega_1} = 0, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j)|_{\partial\Omega_2} = g. \end{cases} \tag{3.3.30}$$

当 $g=0$ 时上式称为齐次混合问题,$g \neq 0$ 时叫作非齐次混合边值问题.条件(3.3.24)就是椭圆条件,算子 $u \to \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j)$ 叫作与算子 $u \to -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + au$ 相关的法向导数算子. 若 $\partial\Omega = \partial\Omega_1$ 或 $\partial\Omega = \partial\Omega_2$ 我们就得到 Dirichlet 问题或 Neumann 问题，在第二种情形为了得到存在性需要假定在 Ω 上 $a \geqslant a_0 > 0$.

例 3.3.4 弹性力学问题. 设 Ω 是三维 Euclid 空间的有界连通开子集,边界充分光滑. 定义空间

$$H = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^3;$$
$$v_i|_{\partial\Omega_1} = 0, 1 \leqslant i \leqslant 3\}. \tag{3.3.31}$$

对空间H赋以乘积范数

$$v = (v_1, v_2, v_3) \to \|v\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{1,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

对任意 $v=(v_1,v_2,v_3)\in(H^1(\Omega))^3$，令

$$\varepsilon_{ij}(v)=\varepsilon_{ji}(v)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{3.3.32}$$

$$\sigma_{ij}(v)=\sigma_{ji}(v)=\lambda\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}(v)\right)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(v),$$

$$1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{3.3.33}$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，即 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0\ (i\neq j)$，$\lambda>0$，$\mu>0$ 是弹性常数. 定义双线性形式

$$a(u,v)=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

$$=\int_\Omega\left\{\lambda\operatorname{div}u\operatorname{div}v+2\mu\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)\right\}dx, \tag{3.3.34}$$

及线性形式

$$f(v)=\int_\Omega f\cdot v dx+\int_{\partial\Omega_2}g\cdot v ds$$

$$=\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}f_iv_idx+\int_{\partial\Omega_2}\sum_{i=1}^{3}g_iv_ids, \tag{3.3.35}$$

其中 $f=(f_1,f_2,f_3)\in(L^2(\Omega))^3$，$g=(g_1,g_2,g_3)\in(L^2(\partial\Omega_2))^3$ 是给定的函数，$\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$.

显然这些线性形式和双线性形式在H上是连续的. 为了证明双线性形式的正定性，需要 Korn 不等式(参见第二章 §2.4)，即存在常数 $C(\Omega)$ 使对任意 $v=(v_1,v_2,v_3)\in(H^1(\Omega))^3$ 恒有

$$\|v\|_{1,\Omega}\leqslant C(\Omega)\left(\sum_{i,j=1}^{3}|\varepsilon_{ij}(v)|_{0,\Omega}^2+\sum_{i=1}^{n}|v_i|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}. \tag{3.3.36}$$

由此可知，当 $\partial\Omega_1$ 非空时，$|v|=\left(\sum_{i,j=1}^{3}|\varepsilon_{ij}(v)|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}$ 与 $\|v\|_{1,\Omega}$ 是等价范数. 由(3.3.34)，$a(v,v)\geqslant 2\mu|v|^2$，因此 $a(u,v)$ 是正

定的双一次形式。

由此可知，存在唯一的函数 $\boldsymbol{u}\in H$ 使泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\lambda(\operatorname{div}v)^{2}+2\mu\sum_{i,j=1}^{3}(\varepsilon_{ij}(v))^{2}\right\}dx-\left(\int_{\Omega}f\cdot v dx+\int_{\partial\Omega_2}g\cdot v ds\right)\qquad(3.3.37)$$

取极小。等价地有

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx=\int_{\Omega}f\cdot v dx+\int_{\partial\Omega_2}g\cdot v ds,\quad\forall v\in H.\qquad(3.3.38)$$

当然(3.3.38)也可以写成偏微分方程形式。

由 Green 公式 (3.3.28) 可知，对任意 $\boldsymbol{u}\in(H^{2}(\Omega))^{3}$ 及 $\boldsymbol{v}\in(H^{1}(\Omega))^{3}$ 恒有

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\left(-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}\right)v_i dx+\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\cos(n,x_j)\right)v_i ds.\qquad(3.3.39)$$

和前面的例子一样，我们得到形式可解的方程

$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}=f_i,\quad 1\leqslant i\leqslant 3.\qquad(3.3.40)$$

将这些方程写成向量形式就是

$$-\mu\Delta u-(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=f,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内},$$

其中用到(3.3.33)。利用(3.3.40)及 $v|_{\partial\Omega_1}=0$，(3.3.38) 可以写成

$$\int_{\partial\Omega_2}\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\cos(n,x_j)\right)v_i ds=\int_{\partial\Omega_2}\sum_{i=1}^{3}g_i v_i ds,\quad\forall v\in H.$$

综上所述,我们得到了下述边值问题

$$\begin{cases} -\mu\Delta u-(\lambda+\mu)\text{grad div}u=f, \text{在}\Omega\text{内}, \\ u|_{\partial\Omega_1}=0, \\ \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}(u)\cos(n,x_j)|_{\partial\Omega_2}=g_i, \quad 1\leqslant i\leqslant 3 \end{cases} \tag{3.3.41}$$

的形式可解性,也就是线性弹性边值问题的可解性。

例 3.3.5 薄板弯曲问题

令

$$\begin{cases} H=H_0^2(\Omega), \\ a(u,v)=\int_\Omega \Delta u\Delta v dx, \\ f(v)=\int_\Omega fv dx, f\in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.3.42}$$

由于 $|\Delta v|_{0,\Omega}$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 的范数(参看第二章 §2.4),可以证明双线性形式 $a(u,v)$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 上是正定的,因此存在唯一的函数 $u\in H_0^2(\Omega)$ 使泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta v|^2dx-\int_\Omega fvdx \tag{3.3.43}$$

在 $H_0^2(\Omega)$ 上取极小. 或者等价地,对 $\forall v\in H_0^2(\Omega)$ 满足变分方程

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v dx=\int_\Omega fvdx. \tag{3.3.44}$$

应用 Green 公式

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v dx=\int_\Omega v\Delta^2 u dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}vds$$
$$+\int_{\partial\Omega}\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}ds,$$

可知

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v dx=\int_\Omega \Delta^2 uv dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta u}{\partial n}vds$$

$$+\int_{\partial\Omega}\Delta u\frac{\partial v}{\partial n}ds.$$

从而我们得到重调和方程齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = f,\\ u|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}\tag{3.3.45}$$

的形式可解性。

所有这些例子我们在第二章 §2.4 中都讨论过，这里用Sobolev空间的概念又重述了一遍。Sobolev 空间理论为处理这些问题给出一个统一的框架，处理问题简洁、明快，有着明显的几何意义。Sobolev 空间理论不仅是证明存在唯一性的强有力的工具，也是研究数值求解的重要工具，以后几章我们将详细讨论这个问题。

第四章　有限元理论发展简介

§4.1　Ritz 法与分片多项式

在第二章中我们讨论过 Ritz 法的收敛性，并且证明解广泛的一类边值问题的 Ritz 法是收敛的．但在实际使用 Ritz 法时，需要选择合适的坐标函数．对一般区域和一般边界条件选择合适的坐标函数是困难的，特别地，有时选择坐标函数的前几项效果很好但当项数增加时，数值结果产生波动，出现稳定性问题．具有光荣历史的 Ritz 法面临衰落的危险，因此需要研究如何更好的选择坐标函数，使 Ritz 法获得新的生命力．

在变分方法发展的同时，差分方法也有了长足的进展．Göttingen 学派的 Courant，Friedrichs 和 Lewy 对差分方法的发展也作了重要的贡献．在用差分方法求解椭圆边值问题时，Southwell 发展了著名的松弛法．在用松弛法求解的过程中，解具有很好的稳定性，对任意给定的初值，解总是收敛的，甚至计算过程发生错误也不影响解的收敛性．同是解椭圆边值问题，差分方法具有如此好的稳定性，我们自然希望从差分方法中吸取一些思想，将差分方法和变分方法结合起来．众所周知，差分方法将区域剖分成矩形或正方形网格，把解在网格顶点上的函数值当作未知数．由于矩形可以分成两个三角形，三角形网格更适合逼近曲线边界，因此我们将区域剖分成许多三角形，利用函数在各三角形顶点的函数值在每个三角形上插出一个函数，试图用这样的方法构造坐标函数．

首先我们要指出，对坐标函数光滑性的要求可以进一步降低．以 Poisson 方程齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u = f, & \text{在}\,\Omega\,\text{内},\\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \tag{4.1.1}$$

为例，问题的解 u 必须在 Ω 内两次连续可微，在 $\bar{\Omega}$ 上连续。与(4.1.1)等价的变分问题是求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使

$$J(u)=\int_\Omega (u_x^2+u_y^2)d\Omega-2\int_\Omega fud\Omega \tag{4.1.2}$$

取极小。注意为使 $J(u)$ 有意义只需 u 在 Ω 内一次连续可微，在 $\bar{\Omega}$ 上连续，这样对坐标函数光滑性的要求就可以降低。下面指出，我们可以进一步降低对坐标函数光滑性的要求，事实上若我们将 u_x 与 u_y 理解成 Sobolev 意义下的广义导数，则(4.1.2)仍有意义，并且由(3.2.11)知，$u|_{\partial\Omega}$ 也有意义。因此为了求(4.1.1)的弱解只需假设 $u\in H_0^1(\Omega)$。下面我们研究构造 $H_0^1(\Omega)$ 中函数的方法。

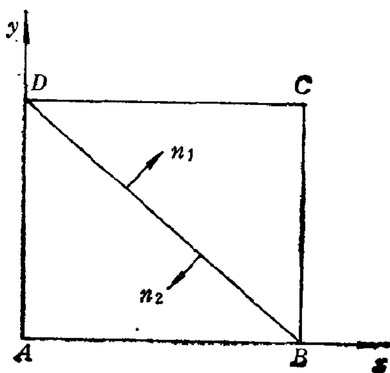


图 4.1.1

考虑正方形 $ABCD$ (图 4.1.1)，设

$$f=\begin{cases}f_1, & \text{当}\ P\in ABD,\\ f_2, & \text{当}\ P\in BCD,\end{cases}$$

并且假定 f 在正方形 $ABCD$ 上连续，我们将证明 f 具有 Sobolev 意义下的一阶导数。事实上，若 f_1 和 f_2 是充分光滑的函数，令

$$\frac{\partial f}{\partial x} \doteq \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, P \in ABD, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, P \in BCD. \end{cases}$$

用Ω表示正方形 $ABCD$,Ω_1 表示 $\triangle ABD$, Ω_2 表示 $\triangle BCD$,则 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \varphi d\Omega = \int_{\Omega_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} \varphi d\Omega + \int_{\Omega_2} \frac{\partial f_2}{\partial x} \varphi d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega_1} f_1 \varphi \cos(n_1, x) ds - \int_{\Omega_1} f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega$$

$$+ \int_{\partial\Omega_2} f_2 \varphi \cos(n_2, x) ds - \int_{\Omega_2} f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega_1} f_1 \varphi \cos(n_1, x) ds + \int_{\partial\Omega_2} f_2 \varphi \cos(n_2, x) ds$$

$$- \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega,$$

其中 n_1 是 Ω_1 的外法线,n_2 是 Ω_2 的外法线. 注意

$$\int_{\partial\Omega_1} = \int_{AB} + \int_{BD} + \int_{DA}, \quad \int_{\partial\Omega_2} = \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DB}.$$

在 BD 上 n_1 与 n_2 方向相反, $\cos(n_1, x) = -\cos(n_2, x)$. 由于 f 连续,在 BD 上 $f_1 = f_2$, 因此

$$\int_{BD} f_1 \cos(n_1, x) ds = -\int_{BD} f_2 \cos(n_2, x) ds,$$

从而

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \varphi d\Omega = \int_{\partial\Omega} f\varphi \cos(n, x) ds - \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega.$$

由于 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi|_{\partial\Omega} = 0$, 从而

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \varphi d\Omega = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

由(3.2.6)可知, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 是 $f(x)$ 的一阶弱导数,也就是 Sobolev 意

义下的一阶广义导数，从而 $f\in H_0^1(\Omega)$. 这个证明可以推广到更一般的情况. 亦即有

定理 4.1.1 若 f 在 Ω 上分片一次连续可微， f 在 $\bar{\Omega}$ 上连续，则 $f\in H^1(\Omega)$. 若进一步假定 $f|_{\partial\Omega}=0$, 则 $f\in H_0^1(\Omega)$.

定理 4.1.2 若 f 在 Ω 上分片两次连续可微，在 $\bar{\Omega}$ 上一次连续可微，则 $f\in H^2(\Omega)$. 若进一步假定 $f|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$, 则 $f\in H_0^2(\Omega)$.

利用这两个定理，在构造 $H_0^1(\Omega)$ 中的函数时，不必要求函数在整个区域 Ω 上一次连续可微，只要假定函数在整个区域 Ω 上连续，分片一次连续可微就可以了. 如前面所述，将 Ω 分成许多三角形，为使函数属于 $H^1(\Omega)$ 只要函数在每个三角形内可微，在整个域上连续. 如果在每个三角形内取函数为一次函数，由于在二维情形一次函数 $ax+by+c$ 共含有三个参数，那么函数可以由在三角形三个顶点的函数值唯一确定. 分片一次函数显然是分片连续可微的. 下面研究如何选择参数使函数在三角形的分界线上连续. 设给定的两个三角形如图 4.1.2 所示，u_1 和 u_2 分别是定义在三角形 I 和三角形 II 上的线性函数，如前所述 u_1 由 u_1 在 $\triangle ACD$ 的三个顶点上的函数值 $u_1(A)$, $u_1(D)$ 和 $u_1(C)$ 决定，u_2 由 u_2 在 $\triangle ABC$ 的三个顶点的函数值 $u_2(A)$, $u_2(B)$ 和 $u_2(C)$ 决定. 由于 u_1 和 u_2 在公共边 AC 上都是一维线性函数，一维线性函数只含有两个参数，因此只要 $u_1(A)=u_2(A)$, $u_1(C)=u_2(C)$, u_1 和 u_2 就在 AC 边上恒等，令

$$u=\begin{cases}u_1, & \text{当 } P\in\triangle ACD,\\ u_2, & \text{当 } P\in\triangle ABC,\end{cases}$$

并且使 $u_1(A)=u_2(A)$, $u_1(C)=u_2(C)$, 则 u 在四边形 $ABCD$ 上连续，并且分片可微，将 Ω 取作四边形 $ABCD$, 显然 $u\in H^1(\Omega)$. 当 Ω 为多边形时，可以用类似的方法构造 $H^1(\Omega)$ 中的函数. 只要将 $\partial\Omega$ 上的顶点的函数值取作零，由(3.2.12)可知，$u\in H_0^1(\Omega)$. 由上面的叙述可知，u 的构造可以逐片进行，每一片上的函数由三角

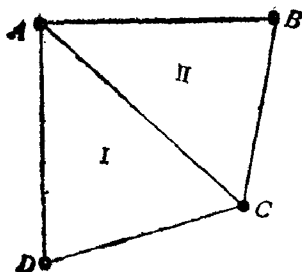


图 4.1.2

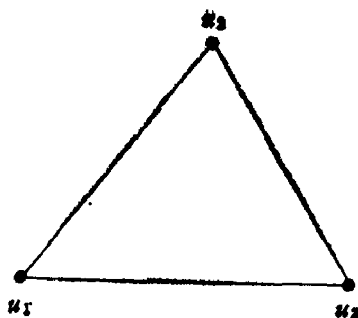


图 4.1.3

形三个顶点上的函数值决定，这样构造出的三角形(即给定三角形的几何形状及函数在三角形三个顶点上的函数值）叫作 Courant 三角形，它是最早构造出来的有限元模型. Courant 三角形用图 4.1.3 表示，其中 u_1, u_2, u_3 表示在三角形三个顶点的函数值. 继 Courant 提出原始的有限元模型（1943）之后，Prager 与 Synge (1947) 也提出了类似的想法，当时由于计算量过大，未能得到推广，但就在这个时候，新的强有力的计算工具诞生了.

第二章中讲过，Neumann 为了研究量子力学的数学基础，提出研究 Hilbert 空间的公理化方法，接着他创立了 Hilbert 空间中算子的谱分解理论和 Neumann 代数，以这些工作为基础，建立了量子力学的数学理论. Neumann 不仅在世时是当时应用数学界的领袖人物，而且也是古往今来最伟大的应用数学家之一. 著名的法国数学家 Dieudonee 认为，如果说在纯粹数学领域中，Neumann 没有在数论和拓扑上作出卓越的贡献，那么他在应用数学方面的成就完全可以和 Gauss 与 Cauchy 并驾齐驱.

尽管以 Göttingen 学派为代表的数学家和以 Sobolev 与 Mikhlin 为代表的苏联数学家已为有限元的数学理论作好了备准工作，以 Neumann 为代表的数学家参加了电子计算机的设计和制造，发展有限元方法的条件已经完全具备，但有限元方法下

一阶段的发展不是由数学家完成的，而是由工程师们完成的。50年代初，在英国和德国，Argyris 和他的合作者发表了一系列关于有限元的文章，Martin 和 Clough 在德国和美国也作了不少工作。结构工程师们作了大量的工作，当时并未认识到它和 Ritz 法的关系，方法也不叫有限元，而是叫直接刚度法。直到 60 年代初，才把这种方法叫作有限元方法，并且认识到，它实际上就是把坐标函数取成分片多项式的 Ritz 法，因此有限元方法可以简单地概括为 Ritz 法加分片多项式。

从 60 年代开始，冯康，黄鸿慈，Varga 等数学家开始从数学方面研究有限元方法，以后这方面的研究越来越多。本章将就其中部分结果作一些简单通俗的介绍，详细的讨论见本书的后四章。由于篇幅所限，还有许多重要的工作根本没有提到，有兴趣的读者可以参看本书所列的参考文献或其它文献。

§4.2 协调元的数学理论

在第二章 §2.4 与第三章 §3.3 中已经指出，弹性力学中的许多问题化为下述极小化问题：求 $u\in V$ 使

$$J(u)=\inf_{v\in V}J(v), \tag{4.2.1}$$

这里 V 是某一适当的 Sobolev 空间。所谓协调元方法就是构造 Sobolev 空间 V 的有限维子空间 V_h，将求解(4.2.1)的问题化为求近似解 $u_h\in V_h$ 使

$$J(u_h)=\inf_{v\in V_h}J(v). \tag{4.2.2}$$

也可以等价地表述成求解问题

$$\forall v\in V, a(u,v)=f(v) \tag{4.2.3}$$

的协调元方法是构造 V 的有限维子空间 V_h，将求解问题(4.2.3)化为求近似解 $u_h\in V_h$ 使得

$$\forall v_h\in V_h, a(u_h,v_h)=f(v_h). \tag{4.2.4}$$

像第三章 §3.3 一样，假设 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 上对称正定的双一次形

式，这个问题的解存在且唯一，问题是估计误差 $\|u-u_h\|$。

定理 4.2.1（Céa 1964） 在定理 3.3.3 的假设下，存在不依赖于空间 V_h 的常数 C，使

$$\|u-u_h\| \leqslant C \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|. \tag{4.2.5}$$

证明 令 $w_h \in V_h$ 是 V_h 中的任意元素，由(4.2.3)和(4.2.4)以及 V_h 是V的子空间可知 $a(u-u_h, w_h)=0$. 由于

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-u_h+v_h-v_h)$$
$$= a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, u_h-v_h),$$

$$u_h - v_h \in V_h,$$

所以 $a(u-u_h, u_h-v_h)=0$，从而 $a(u-u_h, u-u_h)=a(u-u_h, u-v_h)$。由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续正定的双一次形式，因此

$$C\|u-u_h\|^2 \leqslant a(u-u_h, u-u_h)$$
$$= a(u-u_h, u-v_h) \leqslant M\|u-u_h\|\|u-v_h\|,$$

于是

$$\|u-u_h\| \leqslant \frac{M}{C}\|u-v_h\|,$$

定理得证.

(4.2.5) 表明误差$\|u-u_h\|$的估计可以归结为逼近性问题，亦即只需计算函数 $u \in V$ 与子空间 $V_h \subset V$ 之间的距离. 假设区域 Ω被剖分成许多小单元 Ω_h，h 是单元 Ω_h 的直径，亦即

$$h = \sup_{x,y \in \Omega_h} \rho(x,y), \tag{4.2.6}$$

其中 $\rho(x,y)$ 表示x 和 y 之间的距离.若存在常数 $C(u)$ 使 $\rho(u, V_h) \leqslant C(u)h^\beta$，$\beta$ 是某个常数，则有

$$\|u-u_h\| \leqslant C(u)h^\beta,$$

β叫作收敛阶，可以简记为 $\|u-u_h\| = O(h^\beta)$.

(4.2.5)是基本误差估计. 由于有限元方法是 Ritz 法加分片多项式，通常的方法是在每个单元上用给定参数插值得到一个多项式作为坐标函数，例如 Courant 三角形就是用三角形三顶点的

函数值插值得到一个一次多项式. 一般地,设 $\Pi_h u$ 表示经插值得到的函数,由于 $\Pi_h u \in V_h$, 显然 $\|u - \Pi_h u\| \geq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$, 因此

$$\|u - u_h\| \leqslant C\|u - \Pi_h u\|. \tag{4.2.7}$$

这样对 $\|u - u_h\|$ 的估计就归结为用 Sobolev 空间 V 的子空间 V_h 上的插值函数 $\Pi_h u$ 逼近 u 的精度的问题.一般地说,用 k 次多项式逼近一个函数,精度是 h^{k+1} 量级,导数逼近精度要降一阶.假设 $\Pi_h u$ 是 k 次多项式,逼近精度为 h^{k+1} 量级. 假如逼近范数取 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$ 的范数, 由于 $H^m(\Omega)$ 中的逼近是函数连同前 m 阶导数的逼近,精度应该降 m 阶,因此我们猜想应该存在常数 C 使

$$\|u - \Pi_h u\|_m \leqslant C h^{k+1-m}. \tag{4.2.8}$$

这只是一个猜想,有待于证明,叙述也应该精确化, 下面我们将逐步证明这个猜想。

在第二章 §2.4 和第三章 §3.2 都着重讨论了在什么条件下 $|u|_{k,\Omega}$ 与 $\|u\|_{k,\Omega}$ 是等价范数,例如不等式(2.4.28). 下面用另一种方法考虑这个问题,由于 $|u|_{k,\Omega}$ 不是范数,由 $|u|_{k,\Omega} = 0$ 只能推出 u 是次数不超过 k 的多项式, 不能推出 $u = 0$, 因此首先要考虑如何将 $|u|_{k,\Omega}$ 变成范数. 如果我们将所有彼此相差为次数不超过 k 的多项式的所有函数都当作一个函数, 这时次数不超过 k 的多项式就可以当作零. 把所有与 v 相差为次数不超过 k 的多项式的所有函数都记为 $\dot{v}$,亦即

$$\dot{v} = \{w \in H^{k+1}(\Omega); w - v \in P_k(\Omega)\}. \tag{4.2.9}$$

所有 $\dot{v}$ 的集合构成一个线性空间,这样定义的空间叫作 $H^{k+1}(\Omega)$ 对 $P_k(\Omega)$ 的商空间,记以 $H^{k+1}(\Omega)/P_k(\Omega)$.

下面对商空间引进范数. 注意对零元素 $\dot{0}$, 不仅包含 0, 也包含所有次数不超过 k 的多项式,为了保证 $\dot{0}$ 的范数仍然是零,我们定义

$$\|\dot{v}\|_{k+1,\Omega} = \inf_{p \in P_k(\Omega)} \|v + p\|_{k+1,\Omega}, \tag{4.2.9$'$}$$

这样我们可以证明 $\|\dot{v}\|_{k+1,\Omega}$ 与 $|\dot{v}|_{k+1,\Omega}$ 是等价范数。

定理 4.2.2 存在仅依赖区域Ω的常数 $C(\Omega)$，使得

$$\inf_{p\in P_k(\Omega)}\|v+F\|_{k+1,\Omega}\leqslant C(\Omega)|v|_{k+1,\Omega},\forall v\in H^{k+1}(\Omega). \tag{4.2.10}$$

并且有

$$\|\dot{v}\|_{k+1,\Omega}\leqslant C(\Omega)|\dot{v}|_{k+1,\Omega},\forall \dot{v}\in H^{k+1}(\Omega)/p_k(\Omega). \tag{4.2.11}$$

证明 设N是次数不超过 k 的多项式空间的维数，$f_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 是 P_k 的共轭空间（即 P_k 上线性泛函构成的空间)的一组基，利用 Hahn-Banach 定理(定理 2.2.8)可以将 f_i 扩张到整个 $H^{k+1}(\Omega)$ 上，仍将这些泛函记为 $f_i,1\leqslant i\leqslant N$，使得 $f_i(p)=0$，$1\leqslant i\leqslant N$，$\forall p\in P_k$，当且仅当 $p=0$。事实上可令 $f_i(p)$ 等于多项式 p 的第 i 个系数，每个多项式 p 可以由它的系数$a_1,\cdots,a_N$ 完全决定．令 $f_i(p)=a_i,1\leqslant i\leqslant N$，显然 $f_i(p)=0(1\leqslant i\leqslant N)$，当且仅当 $p=0$。对任意的 $v\in H^{k+1}(\Omega)$，取 $q\in P_k$ 使 $f_i(v+q)=0$，即 $f_i(v)=-f_i(q),i=1,\cdots,N$。将 q 的第 i 个系数取作 $-f_i(v)$，这时 q 的系数为 $(-f_1(v),\cdots,-f_N(v))$，从而 q 被唯一确定，于是

$$\|\dot{v}\|_{k+1}=\inf_{p\in P_k}\|v+p\|_{k+1}\leqslant\|v+q\|_{k+1},$$

用与证明不等式(2 4.28)相同的方法可以证明存在常数 $C(\Omega)$ 使

$$\|v+q\|_{k+1}\leqslant C(\Omega)\left(|v+q|_{k+1}+\sum_{i=1}^{n}|f_i(v+q)|\right),$$

注意 $|v+q|_{k+1}=|v|_{k+1},\|\dot{v}\|_{k+1}=\inf\limits_{q\in P_k}\|v+q\|_{k+1}$，于是

$$\|\dot{v}\|_{k+1}\leqslant C(\Omega)|\dot{v}|_{k+1},$$

定理得证。

前面说过，有限元法将区域Ω分成许多小单元Ω_k、在 Ω_k 上取 k 次多项式为坐标函数，当 Ω_k 的直径 $h\to 0$ 时，即使 k 为固定的正整数(例如对 Courant 三角形 $k=1$)，也可以逼近任意函数。

为了考虑 $\|u-u_h\|_m$ 当 $h\to 0$ 时的变化情况，先研究 $\|u\|_{m,\Omega_h}$ 当 $h\to 0$ 时的变化情况. 在实用中常常把 Ω_h 取作三角形，为了研究当 $h\to 0$ 时，$\|u\|_{m,\Omega_h}$ 的变化情况，Ciarlet 利用了仿射变换的技巧. 设

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \vdots\\ \hat{x}_n\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}\cdots b_{1n}\\ b_{21}\cdots b_{2n}\\ \cdots\\ b_{n1}\cdots b_{nn}\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

若 $\det B\neq 0$，则变换

$$x=B\hat{x}+b \tag{4.2.12}$$

叫作仿射变换. 仿射变换变三角形为三角形. 当有限元剖分逐渐加细时，三角形的大小和形状都不断变化，但都可以用仿射变换变成标准三角形. 若 Ω_h 的几何形状相同，只是大小不同，这样的三角形可以通过相似变换互变. 为讨论简单，假设 B 为对角形矩阵，即

$$B=\begin{pmatrix}b_1 & 0\cdots & 0\\ 0 & b_2 & \vdots\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & b_n\end{pmatrix}\quad b_i>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

当 $b_1=b_2\cdots=b_n$ 时，(4. 2.12) 就是相似变换. 假设区域 $\hat{\Omega}$ 经变换(4.2.12)变成 Ω，x_i 是新坐标，$\hat{x}_i$ 是旧坐标，由于 $u(x_1,\cdots,x_n)=\hat{u}(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n)$，$x_i=b_i\hat{x}_i$，$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{1}{b_i}\dfrac{\partial\hat{u}}{\partial\hat{x}_i}$，$d\Omega=|\det(B)|\,d\hat{\Omega}$，则有

$$\begin{aligned}|u|_{1,\Omega}&=\left[\int_\Omega\sum_1^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega\right]^{1/2}\\ &=\left[\int_{\hat\Omega}\sum_1^n\left(\frac{\partial\hat{u}}{b_i\partial\hat{x}_i}\right)^2 |\det(B)|\,d\hat{\Omega}\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

记 $\|B\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{b_i\}$，$\|B^{-1}\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{b_i}\right\}$，可以验证 $\|B\|$ 与 $\|B^{-1}\|$ 都是范数，$\|B\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$，因此

$$|u|_{1,\Omega} \leqslant \|B^{-1}\| \, |\det(B)|^{1/2} |\hat{u}|_{1,\hat{\Omega}}.$$

类似地可以证明

$$|\hat{u}|_{1,\hat{\Omega}} \leqslant \|B\| \, |\det(B^{-1})|^{-\frac{1}{2}} |u|_{1,\Omega}.$$

这两个不等式对任意仿射变换都成立，只是把 $\|B\|$ 理解为 $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$。类似地对范数 $\|u\|_{m,\Omega}$ 和 $\|\hat{u}\|_{m,\hat{\Omega}}$ 有

定理 4.2.3 设 Ω 和 $\hat{\Omega}$ 如前面所述，若函数 $v\in H^m(\Omega)$，$\hat{v}(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n) = v(x_1,\cdots,x_n)$，则有常数 $C = C(m,n)$ 使对任意 $v\in H^m(\Omega)$，$\hat{v}\in H^m(\hat{\Omega})$ 有

$$|\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}} \leqslant C(m,n)\|B\|^m |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{m,\Omega}, \quad (4.2.13)$$

$$|v|_{m,\Omega} \leqslant C(m,n)\|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{1/2} |\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}}. \quad (4.2.14)$$

证明可以参见 Ciarlet [50]p. 118 或引理 5.2.2。

下面用几何量来表示 $\|B\|$ 和 $\|B^{-1}\|$。用 $\mathrm{diam}(\Omega)$ 表示 Ω 的直径，$h = \mathrm{diam}(\Omega)$，$\hat{h} = \mathrm{diam}(\hat{\Omega})$。

$$\rho = \sup\{\mathrm{diam}(S);\ S \text{ 是包含在 } \Omega \text{ 内的球}\}, \quad (4.2.15)$$
$$\hat{\rho} = \sup\{\mathrm{diam}(\hat{S});\ \hat{S} \text{ 是包含在 } \hat{\Omega} \text{ 内的球}\},$$

由于 $\|B\| = \frac{1}{\hat{\rho}}\sup\limits_{\|\xi\|=\hat{\rho}}\|B\xi\|$，根据 $\hat{\rho}$ 的定义，对满足 $\|\xi\| = \hat{\rho}$ 的向量 ξ，存在两点 $\hat{y}$，$\hat{z}\in\bar{\hat{\Omega}}$ 使 $\hat{y} - \hat{z} = \xi$（图 4.2.1）。由于 $B\xi = F(\hat{y}) - F(\hat{z})$，$F(\hat{y})\in\bar{\Omega}$，$F(\hat{z})\in\bar{\Omega}$，我们有 $\|B\xi\| \leqslant h$，其中 $F(\hat{y}) = B\hat{y} + b$。因此

$$\|B\| \leqslant \frac{h}{\hat{\rho}}.$$

类似地可以证明

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\hat{h}}{\rho}.$$

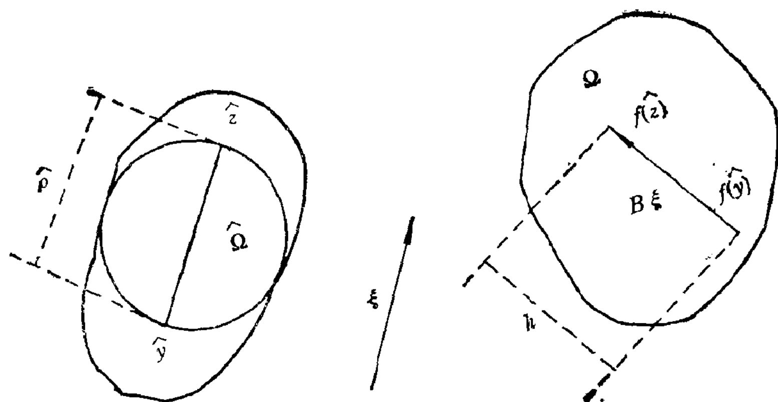


图 4.2.1

综合上述得到下述的定理

定理 4.2.4 设 $F: \hat{x} \in E^n \to (B\hat{x} + b) \in E^n$ 是可逆的仿射变换,则有

$$\|B\| \leqslant \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leqslant \frac{\hat{h}}{\rho}. \tag{4.2.16}$$

有了以上的准备,我们就可以证明猜想 (4.2.8). 插值算子将 $H^{k+1}(\Omega)$ 中的函数 v 用 $H^m(\Omega)$ 中的函数来替代,这里 $m < k+1$,通常是由分片多项式构成. 若用 k 次多项式作插值函数,当 $v \in P_k(\hat{\Omega})$,即 v 是 k 次多项式时,v 的插值函数就是 v 本身. 用 $\hat{\Pi}$ 表示插值算子,则 $\forall \hat{p} \in P_k(\Omega), \hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}$. 这时我们可以证明下述的定理.

定理 4.2.5 设 $k+1 > m, \hat{\Pi}$ 是从 $H^{k+1}(\Omega)$ 到 $H^m(\Omega)$ 的插值算子,使得

$$\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}, \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}). \tag{4.2.17}$$

对 $\Omega = F(\hat{\Omega})$,其中 F 如(4.2.12)所示,定义

$$(\widehat{\Pi_\Omega v}) = \hat{\Pi}\hat{v}, \tag{4.2.18}$$

其中 $\hat{v} \in H^{k+1}(\hat{\Omega}), v \in H^{k+1}(\Omega)$,则存在常数 $C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega})$,使得对任意 $\Omega = F(\hat{\Omega})$ 及 $v \in H^{k+1}(\Omega)$

$$|v-\Pi_\Omega v|_{m,\Omega}\leqslant C(\hat{\Pi},\hat{\Omega})\frac{h^{k+1}}{\rho^m}|v|_{k+1,\Omega},\qquad(4.2.19)$$

其中 h 和 ρ 分别由(4.2.6)与(4.2.15)所示。

证明 设 I 是从 $H^{k+1}(\hat{\Omega})$ 到 $H^m(\hat{\Omega})$ 的恒等算子，显然 $I-\hat{\Pi}$ 是从 $H^{k+1}(\hat{\Omega})$ 到 $H^m(\hat{\Omega})$ 的连续算子，记算子 $I-\hat{\Pi}$ 的范数为 $\|I-\hat{\Pi}\|_{\mathscr{L}(H^{k+1}(\hat{\Omega}),H^m(\hat{\Omega}))}$，显然

$$|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}}\leqslant\|I-\hat{\Pi}\|_{\mathscr{L}(H^{k+1}(\hat{\Omega}),H^m(\hat{\Omega}))}\|\hat{v}\|_{k+1,\hat{\Omega}}.$$

由于 $\forall\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega}),\hat{\Pi}\hat{p}=\hat{p}$，所以

$$\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}=(I-\hat{\Pi})(\hat{v}+\hat{p}),\forall\hat{v}\in H^{k+1}(\hat{\Omega})\ 及\ \forall\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega}).$$

从而

$$|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}}\leqslant\|I-\hat{\Pi}\|_{\mathscr{L}(H^{k+1}(\hat{\Omega}),H^m(\hat{\Omega}))}\|\hat{v}+\hat{p}\|_{k+1,\hat{\Omega}},\qquad(4.2.20)$$

由于(4 2.20)对任意 $\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega})$ 都成立，因此

$$|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}}\leqslant\|I-\hat{\Pi}\|_{\mathscr{L}(H^{k+1}(\hat{\Omega}),H^m(\hat{\Omega}))}\inf_{\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega})}\|\hat{v}+\hat{p}\|_{k+1,\hat{\Omega}}.$$

再由定理 4.2.2 就有

$$|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}}\leqslant C(\hat{\Pi},\hat{\Omega})|\hat{v}|_{k+1,\hat{\Omega}}.\qquad(4.2.21)$$

由(4.2.18)可知

$$\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}=(\widehat{v-\Pi_\Omega v}),$$

由定理 4.2.3 可知

$$|v-\Pi_\Omega v|_{m,\Omega}\leqslant C\|B^{-1}\|^m|\det(B)|^{1/2}|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}|_{m,\hat{\Omega}},\qquad(4.2.22)$$

由同一定理

$$|\hat{v}|_{k+1,\hat{\Omega}}\leqslant C\|B\|^{k+1}|\det(B)|^{-1/2}|v|_{k+1,\Omega}.\qquad(4.2.23)$$

综合(4.2.21),(4.2.22)和(4.2.23)，并利用不等式 $\|B\|\leqslant h/\hat{\rho}$ 和不等式 $\|B^{-1}\|\leqslant\hat{h}/\rho$（定理 4.2.3）就得到不等式 (4.2.19)，定理得证。

注意 $\rho<h$，假设存在与 h 无关的常数 C 使得所有单元 Ω_k 都有

$$h\leqslant C\rho,\qquad(4.2.24)$$

则不等式(4.2.19)可以写成

$$|v-\Pi_{\Omega}v|_{m,\Omega}\leqslant C(\hat{\Pi},\hat{\Omega})h^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}.$$

这就是不等式(4.2.8)，从而证明了我们的猜想。(4.2.24)的几何意义是存在一个角度 θ_0，使得当 $h\to 0$ 时，三角形的各内角都大于 θ_0。

§4.3 非协调元的数学理论

用协调元求解二阶椭圆边值问题效果很好，但用来求解四阶椭圆边值问题就出现不少问题。例如求解薄板弯曲问题要求 $u\in H^2(\Omega)$（参见§3.3 例 5）。由定理 4.1.1 和定理 4.1.2，构造 $H^1(\Omega)$ 中的函数要求函数分片一次连续可微并在整个域上连续，构造 $H^2(\Omega)$ 中的函数则需要函数分片两次连续可微，在整个域上一次连续可微。对三角形剖分，为了使分片多项式在交界线上连续，只需取分片一次多项式，即用函数在三角形三个顶点处的函数值作参数插出一个一次多项式，如 Courant 三角形。为了使分片多项式在三角形交界线上一次连续可微，则需要四次以上的多项式。Argyris 取三角形三个顶点 a_0,a_1,a_2 处的函数值 w_0,w_1,w_2；一阶导数值 $w_{0x},w_{0y},w_{1x},w_{1y},w_{2x},w_{2y}$；二阶导数值 $w_{0xx},w_{0xy},w_{0yy},w_{1xx},w_{1xy},w_{1yy},w_{2xx},w_{2xy},w_{2yy}$；以及三角形三个边中点处的法向

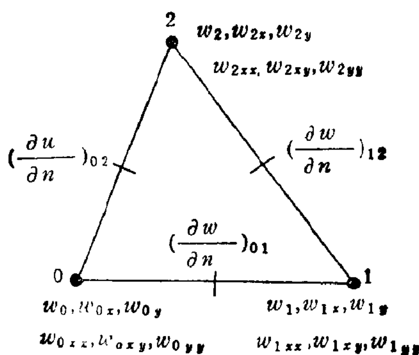


图 4.3.1

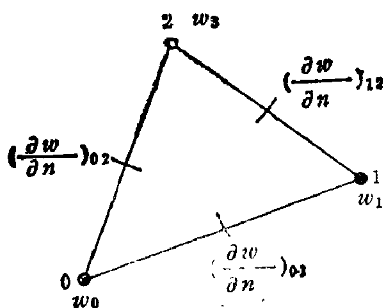


图 4.3.2

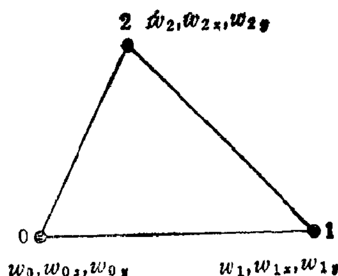


图 4.3.3

导数值 $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{01}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{12}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{20}$ 等21个参数插值出一个五次多项式,这样构造出的单元叫 Argyris 三角形(见图 4.3.1). 可以证明这样构造出的分片多项式属于 $H^1(\Omega)$, 但用这样的函数作为有限元法的基函数显然太麻烦了. 为此有限元工作者构造出一些新的单元,其中最简单的是 Morley 三角形,即取三角形三顶点的函数值 w_0, w_1, w_2 和三角形三边中点的法向导数值$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{01}$,$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{12}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{20}$ 等六个参数,插值出一个二次多项式, 这样构造出的单元叫 Morley 三角形(见图 4.3.2). 这样构造出来的函数虽然不属于 $H^2(\Omega)$, 但是用来求解薄板弯曲问题可以得到收敛的结果. Zienkiewicz 用三角形三个顶点处的函数值 w_0, w_1, w_2 和一阶导数值 $w_{0x}, w_{0y}, w_{1x}, w_{1y}, w_{2x}, w_{2y}$ 等 9 个参数插值出一个不完全的三次多项式. 在剖分规则的情况下, 求解薄板弯曲问题效果很好. 这样构造出的单元叫 Zienkiewicz 三角形, 如图 4.3.3 所示. Morley 元和 Zienkiewicz 元的基函数都不属于 $H^2(\Omega)$, 从而不是协调元,这样的单元叫非协调元. 下面介绍非协调元的数学理论.

由于非协调元构造的基函数不属于 Sobolev 空间, 所考虑的函数不一定有广义导数, 因此要在比 Sobolev 空间更广的空间中

考虑问题，而把 Sobolev 空间当作它的子空间. 代替 $H^2(\Omega)$ 考虑由向量函数 $(u^{00},u^{10},u^{01},u^{20},u^{11},u^{02})$ 构成的线性空间,其中 u^{00}, $u^{10},u^{01},u^{20},u^{11},u^{02}$ 属于 $L^2(\Omega)$. 记这个空间为$L^{2,2}(\Omega)$. 设 $v=(v^{00}$, $v^{10},v^{01},v^{20}, v^{11}, v^{02})$ 和 $w=(w^{00}, w^{10}, w^{01}, w^{20}, w^{11}, w^{02})$ 属于 $L^{2,2}(\Omega)$, 定义内积

$$(v,w)=\int_\Omega (v^{00}w^{00}+v^{10}w^{10}+v^{01}w^{01}+v^{20}w^{20}+v^{11}w^{11}+v^{02}w^{02})d\Omega$$

及范数

$$\|u\|_{L^{2,2}(\Omega)}=\left[\int_\Omega [(u^{00})^2+(u^{10})^2+(u^{01})^2+(u^{20})^2+(u^{11})^2+(u^{02})^2]\,d\Omega\right]^{1/2},$$

可以验证 $L^{2,2}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 对 $u\in H^2(\Omega)$, 令 $u^{00}=u$, $u^{10}=u_x,u^{01}=u_y,u^{20}=u_{xx},u^{11}=u_{xy},u^{02}=u_{yy}$, 显然

$$\|u\|_{L^{2,2}(\Omega)}=\|u\|_{2,\Omega}.$$

这里$\|\ \ \|_{2,\Omega}$ 是 $H^2(\Omega)$ 的范数. 在这个意义上,$H^2(\Omega)$ 可以看作 $L^{2,2}(\Omega)$ 的子空间.

一般地,设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_n$ 为非负整数, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,u^\alpha\in L^2(\Omega)$. 考虑满足 $|\alpha|\leqslant k$ 的形如 $\{u^\alpha\}$ 的向量函数构成的线性空间,记这个空间为 $L^{k,2}(\Omega)$. 设 $v,w\in L^{k,2}(\Omega)$, 定义内积和范数

$$(v,w)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega v^\alpha w^\alpha d\Omega, \tag{4.3.1}$$

$$\|u\|_{L^{k,2}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |u^\alpha|^2 d\Omega\right)^{1/2}, \tag{4.3.2}$$

显然 $L^{k,2}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 若 $u\in H^k(\Omega)$, 则令 $u^\alpha=D^\alpha u$, 显然

$$\|u\|_{L^{k,2}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha u|^2 d\Omega\right)^{1/2}. \tag{4.3.3}$$

这时(4.3.3)与 $H^k(\Omega)$ 的范数一致,在这个意义上 $H^k(\Omega)$ 可以看

作 $L^{k,2}(\Omega)$ 的子空间。

设 E_0 是 Sobolev 空间，$E_0 \subset L^{k,2}(\Omega)$，由第三章 §3.3 可知，问题求 $u_0 \in E_0$ 使

$$J(u_0) = \inf_{v \in E_0} J(v), \tag{4.3.4}$$

可以归结为求 $u_0 \in E_0$ 使得对任意 $v \in E_0$，

$$a(u_0, v) = f(v), \tag{4.3.5}$$

其中 $a(\cdot, \cdot): E_0 \times E_0 \to R$ 是对称正定双线性连续泛函。所谓非协调元方法就是构造 $L^{k,2}(\Omega)$ 的有限维子空间 E_n，$E_n \not\subset E_0$，求 $u_n \in E_n$ 使得对任意 $v \in E_n$，

$$a(u_n, v) = f(v), \tag{4.3.6}$$

并把 u_n 当作(4.3.5) 的近似解。假定存在常数 α_0 和 α_1 使得对所有 $v_n \in E_n, n = 1, 2, \cdots$，

$$\alpha_0 \|v_n\| \leqslant \sup_{0 \neq \varphi \in E_n} \frac{|a(\varphi, v_n)|}{\|\varphi\|} \leqslant \alpha_1 \|v_n\|, \tag{4.3.7}$$

并且对任意 $v, w \in L^{k,2}(\Omega)$

$$|a(v, w)| \leqslant \alpha_1 \|v\| \|w\|. \tag{4.3.8}$$

这里的范数都理解为 $L^{k,2}(\Omega)$ 的范数。由 (4.3.7)的假设可推出(4.3.6)的解是存在唯一的(参见定理 8.1.1)。在(4.3.8)成立时，由

$$\alpha_0 \|v_n\|^2 \leqslant |a(v_n, v_n)|, \ \forall v_n \in E_n, n = 1, 2, \cdots. \tag{4.3.9}$$

可导出(4.3.7)。

为了简单起见，假设 $a(\cdot, \cdot): L^{k,2}(\Omega) \times L^{k,2}(\Omega) \to R$ 是对称正定的双线性连续泛函。像第三章第三节一样定义能量范数，对 $u, v \in L^{k,2}(\Omega)$ 定义

$$(u, v)_a = a(u, v), \tag{4.3.10}$$

$$\|u\|_a = a(u, u)^{1/2}, \tag{4.3.11}$$

根据 $a(u,v)$的假设可知范数 $\| \ \|_a$ 与 $L^{k,2}(\Omega)$ 的范数是等价范数，从而仍是 Hilbert 空间。由于 $f(v)$ 是 $L^{k,2}(\Omega)$ 上的连续线性泛函，由 Riesz 表现定理(第二章定理 2.3.1)，存在唯一的 $w \in L^{k,2}(\Omega)$ 使得对任意 $v \in L^{k,2}(\Omega)$

$$a(v,w) = f(v). \tag{4.3.12}$$

由 §2.4 和 §3.3 可知

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - a(v,w)$$

$$= \frac{1}{2}a(v-w, v-w) - \frac{1}{2}a(w,w)$$

$$= \frac{1}{2}\|v-w\|_a^2 - \frac{1}{2}\|w\|_a^2, \tag{4.3.13}$$

因此问题 (4.3.4) 相当于求w到 E_0 的最短距离，问题的解u就是w在空间 E_0 上的投影. 类似地可知问题 (4.3.6) 的解 u_n 就是w在空间 E_n 上的投影. 协调元方法相当于求 $J(v)$ 在 E_0 的有限维子空间 E_n 上的极值，从而等价于求w在 E_n 上的投影 u_n. 在图 4.3.4 中用平面表示 E_0,用直线表示 E_n,显然 $\|u_n - v_0\| = \rho(u_0, E_n)$，即 $\|u_n - u_0\|$ 等于 u_0 到空间 E_n 的距离. 如果 $E_{n+1} \supset E_n$，则当n增加时，$J(u_n)$ 单调减小，$\|u_n - u_0\|$ 也单调减小，因此可以期望 $\|u_n - u_0\|$ 的收敛是单调的，大小可以用上节所讲的 Sobolev 空间插值理论来估计.

对非协调元 $E_n \not\subset E_0$，如图 4.3.5 所示，显然

$$\|u_n - u_0\|^2 = p_n^2 + q_n^2, \tag{4.3.14}$$

其中 p_n 表示从 u_0 到 E_n 的距离 $\rho(u_0, E_n)$. 和协调元情况一

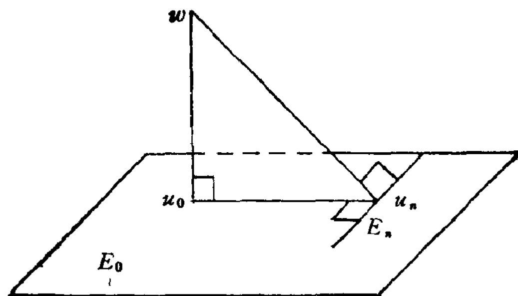


图 4.3.4

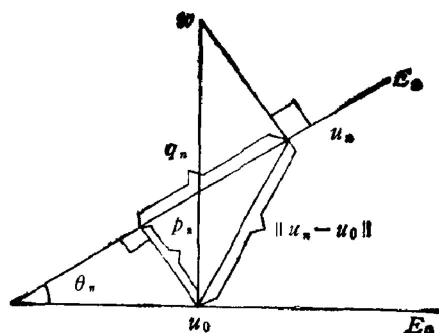


图 4.3.5

样,可以用 Sobolev 空间插值理论来估计. q_n 是由非协调而引起的误差,下面来估计 q_n. 注意 w 在 E_n 上的投影是 u_n, 在 E_0 上的投影是 u_0. 由图 4.3.5 可知, q_n 是向量 $w-u_0$ 在 E_n 上投影的长度, $q_n=\|w-u_0\|\cos\theta_n$, θ_n 是 $w-u_0$ 与 E_n 的最小张角. 因此当 θ_n 为锐角时

$$\cos\theta_n=\sup_{\varphi\in E_n}\frac{|(\varphi,w-u_0)_a|}{\|w-u_0\|_a\|\varphi\|_a},$$

由(4.3.11)和(4.3.12)可知

$$\cos\theta_n=\sup_{\varphi\in E_n}\frac{|a(\varphi,u_0)-f(\varphi)|}{\|w-u_0\|\|\varphi\|},$$

因此

$$q_n=\|w-u_0\|\cos\theta_n=\sup_{\varphi\in E_n}\frac{|a(\varphi,u_0)-f(\varphi)|}{\|\varphi\|}. \tag{4.3.15}$$

令 $d(\varphi)=f(\varphi)-a(\varphi,u_0),\varphi\in E_n$, 将 $d(\varphi)$ 看作 E_n 上的线性泛函,则 $d(\varphi)$ 的范数为

$$\|d\|_{E_n}=\sup_{\varphi\in E_n}\frac{|a(\varphi,u_0)-f(\varphi)|}{\|\varphi\|}, \tag{4.3.16}$$

从而 $q_n=\|d\|_{E_n}$.

对协调元情形, $E_n\subset E_0$, 对任意 $\varphi\in E_n$, $a(u_0,\varphi)=f(\varphi)$, 所以 $\|d\|_{E_n}=0$. 但对非协调元, $E_n\not\subset E_0$, 可能存在 $\varphi\in E_n$ 使

$a(u_0, \varphi) \neq f(\varphi)$，从而 $\|d\|_{E_n} \neq 0$，因此 $\|d\|_{E_n}$ 表示由不协调而产生的误差．这样(4.3.14)可以改写成

$$\|u_0 - u_n\|^2 = (\rho(u_0, E_n))^2 + \|d\|_{E_n}^2. \qquad (4.3.17)$$

从而 $\lim_{n\to\infty}\|u_0 - u_n\| = 0$ 的充分必要条件是条件

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u_0, E_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|d\|_{E_n} = 0 \qquad (4.3.18)$$

同时成立．第一个条件与协调元情形一样，我们已经作过讨论，现在讨论第二个条件．

用 $E_0^{\perp}$ 表示 $L^{k,2}(\Omega)$ 上与 E_0 正交的所有连续线性泛函的空间，也就是说若 $d \in E_0^{\perp}$，则对任意 $\varphi \in E_0$ 有 $d(\varphi) = 0$．从几何上看，可以把 $E_0^{\perp}$ 想象成 E_0 的所有法线的集合，E_0 中的任意元素必与 $E_0^{\perp}$ 正交，反之与 $E_0^{\perp}$ 中所有元素正交的元素必属于 E_0．若令 $d(\varphi) = f(\varphi) - a(\varphi, u_0)$，其中 $a(\cdot,\cdot)$ 和 u_0 如(4.3.5)所示，则对任意 $\varphi \in E_0, d(\varphi) = 0$，因此 $d \in E_0^{\perp}$．显然如果对任意 $d \in E_0^{\perp}$，$\lim_{n\to\infty}\|d\|_{E_n} = 0$，则(4.3.18)的第二个条件成立．从几何上看，$\forall d \in E_0^{\perp}, \lim_{n\to\infty}\|d\|_{E_n} = 0$ 可以理解成尽管 $E_n \not\subset E_0, E_n$ 不与 $E_0^{\perp}$ 正交，但当 $n \to \infty$ 时，E_n 与 $E_0^{\perp}$ 趋近于正交．精确一点说，若 $x_n \in E_n$，x_n 弱收敛于 x_0，则 $x_0 \in E_0$．为此我们引进下述的定义：若 $x_n \in E_n$，序列 $\{x_n\}$ 的所有弱收敛子列的极限都属于 E_0，则称序列 $E_0, \{E_n\}$ 是弱闭的．

可以证明(参见 F. Stummel [62] 或引理 8.1.2)：序列 E_0, $\{E_n\}$ 弱闭当且仅当 $\forall d \in E_0^{\perp}, \lim_{n\to\infty}\|d\|_{E_n} = 0$．

根据这个结果可知，(4.3.18)第二个条件可以用序列 $E_0, \{E_n\}$ 弱闭来替代，亦即若 $x_n \in E_n$，则 x_n 的弱极限属于 E_0．设 $E_0 = H^m(\Omega)$，Ω 是平面上的区域，由第三章 §3.2 及 $L^{m,2}(\Omega)$ 的定义可知，若 $L^{m,2}(\Omega)$ 中的元素 $v = (v^{\mu}) \in H^m(\Omega)$，则 $v^{\mu} = D^{\mu}v, |\mu| \leqslant m$，从而对任意 $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} v^{\mu} d\Omega = -\int_{\Omega} \phi v^{\mu+e_l} d\Omega, l = 1, 2, |\mu| \leqslant m - 1,$$

其中，$e_l=(\delta_{1l},\delta_{2l}),\delta_{ll}=1,\delta_{lj}=0,l\neq j$。令

$$T_{l,\mu}(\phi,\ v)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_l}\ v^{\mu}+\phi v^{\mu+e_l}\right)d\Omega. \qquad (4.3.19)$$

显然 $v\in H^m(\Omega)$ 当且仅当对所有 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，$T_{l,\mu}(\phi,v)=0$，$l=1,2,|\mu|\leqslant m-1$。为构造空间 E_n，将Ω分成许多单元 K，记这些K的集合为 $\mathscr{K}_n$，在每个单元K上定义一个多项式 v_n^K，由 v_n^K 拼凑成一个定义在Ω上的函数 v_n，由 v_n 构成 E_n。由 Gauss 定理可知

$$T_{l,\mu}(\phi,v)=\sum_{K\in\mathscr{K}_n}\int_{\partial K}\phi D^{\mu}v_n^K N_l ds.$$

若 $\{v_n\}$ 弱收敛，$E_0,\{E_n\}$ 弱闭相当于对任意 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{K\in\mathscr{K}_n}\int_{\partial K}\phi D^{\mu}v_n^K N_l ds=0. \qquad (4.3.20)$$

N_l 代表Ω的外法线与 x_l 轴夹角的余弦。若(4.3.20)成立，则称$\{v_n\}$通过广义分片检验。在前面的假设下可以证明 $\|u_n-u_0\|\to 0$ 的充分必要条件是 $\rho(u_0,\ E_n)\to 0$ 且序列 $\{v_n\}$ 通过广义分片检验。这个结果看起来不错，但使用时有两个问题：(1) 需要检验条件(4.3.7)，虽然 $a(u,v)$ 在 E_0 上是正定的(第二章 §2.4)，但在 E_n 上是否正定则需要验证，这是一个困难的问题；(2) 广义分片检验用起来很不方便，工程师常用的分片检验在理论上又没有证明(参见 Stummel [61]、石钟慈[13])。非协调元在使用上也有问题，Morley 元精度不好，Zienkiewicz 元只对规则剖分才收敛，因此需要研究更好的元。

为了构造出更有效的求解薄板弯曲问题的单元，麻省理工学院的卞学璜教授于 1964 年提出杂交元方法。众所周知，薄板弯曲问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u=f,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

可以归结为求解在满足条件 $u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$ 下泛函

$$J(u)=\int_{\Omega}(u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2-2fu)d\Omega,$$

的极值问题.应用第一章 §1.3 的方法,引进 Lagrange 乘子 $\lambda_1(x,y)$ 和 $\lambda_2(x,y)$，可以将上述条件极值问题转化为求泛函

$$J(u)=\int_{\Omega}(u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2-2fu)d\Omega$$
$$+\int_{\partial\Omega}\lambda_1(x,y)u(x,y)ds$$
$$+\int_{\partial\Omega}\lambda_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

的无条件极值问题．求后一泛函极值的好处是事先无需假定 u 满足边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$，变分的结果自动满足边界条件．这样就为求解提供许多便利．假设 Ω 为多边形,将 Ω 分成许多三角形 K,K 的总体记以 $\mathscr{K}_n$,有限元法就是求 $u\in H_0^2(\Omega)$ 使泛函

$$J(u)=\sum_{K\in\mathscr{K}_n}\int_{\Omega}(u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2-2fu)d\Omega$$

极小。这里 $v\in H_0^2(\Omega)$ 可以看成约束条件，设 v 在每个 K 上为多项式，为了使 $v\in H_0^2(\Omega)$，由定理 4.1.2 可知， v 必须满足

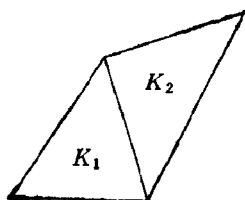


图4.3.6

$$v|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0. \qquad (4.3.21)$$

在任意两个三角形 K_1 和 K_2 的公共边界 ∂K 上

$$v^{K_1}=v^{K_2},\quad \frac{\partial v^{K_1}}{\partial n}=-\frac{\partial v^{K_2}}{\partial n},$$

也可以简单地写成在 ∂K 上

$$v^+ = v^-, \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ = -\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_-. \tag{4.3.22}$$

为了消除条件（4.3.22）的限制，引进 Lagrange 乘子 $\lambda_1(x,y)$ 和 $\lambda_2(x,y)$，在满足 $u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ 的条件下求泛函

$$J(u) = \sum_{K\in\mathscr{K}_n}\left[\iint_K (u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2 - 2fu)d\Omega\right.$$

$$+ \int_{\partial K} \lambda_1(u_+ - u_-)ds$$

$$\left.+ \int_{\partial K} \lambda_2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_+ + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_-\right]ds\right]$$

的极值．这时只需假定 u 是满条件（4.3.21)的分片多项式，变分的结果使(4.3.22）自动满足．这个方法在求解时除了引进定义在 K 上的 $u(x, y)$，还引进了定义在 K 的边界上的函数 $\lambda_1(x,y)$ 和 $\lambda_2(x, y)$．用杂交元方法构造出一些有效的新单元，数值效果良好．Babuška，Brezzi，应隆安、周天孝等对杂交元的理论基础作了研究．唐立民、陈万吉、刘迎曦等于 1980 年提出拟协调元方法，进一步发展了有限元方法，我们以拟协调元方法为背景，提出多套函数有限元方法的数学理论．石钟慈教授对这个问题也作了系统的研究，有兴趣的读者可以参看[16]．

§ 4.4　多套函数有限元的数学理论

前面讲过，经典的有限元方法可以看成是坐标函数取成分片多项式的 Ritz 法．设 w_0 是薄板弯曲问题的解，w_i 是当剖分为 $\mathscr{K}_i$ 时按有限元法求出的近似解，对协调元而言，当 $i\to\infty$ 时

$$\|w_i - w_0\|_2^2 = \sum_{K\in\mathscr{K}_i}\int_K\left[(w_i - w_0)^2\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)^2\Bigg]d\Omega\to 0,$$

用图表示如下:

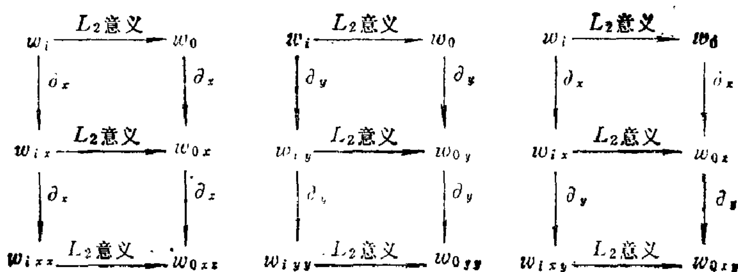


图 4.4.1

虽然在每个单元上出现了 $w_{ix}, w_{iy}, w_{ixx}, w_{ixy}, w_{iyy}$ 等函数,但它们都可以由对 w_i 求导数而得到,这些函数的边值如 $w_i|_{\partial K}, w_{ix}|_{\partial K}, w_{iy}|_{\partial K}$ 可以由点从 K 内趋向边界点时相应函数的极限值得到. 只要给定了 w_i, w_i 的各阶导数及其边值都由 w_i 决定,所以我们认为每个单元K上只有一套函数. 一般地说,为了逼近 w_{0x}, w_{0xx}, 我们完全可以构造另外两套不是 w_i 导数的函数 φ_i 和 ψ_i,使当 $i\to\infty$时, $\varphi_i\to w_{0x}, \psi_i\to w_{0xx}$, 但 $\varphi_i\neq\dfrac{\partial w_i}{\partial x}$, $\psi_i\neq\dfrac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}$, 如

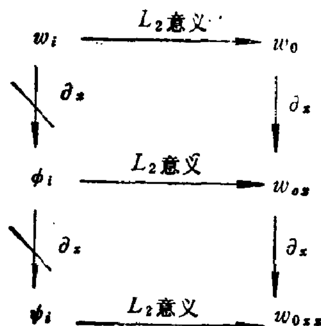


图 4.4.2

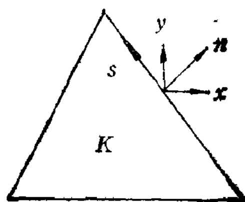


图 4.4.3

图 4.4.2 所示。这时 K 上有相互独立的三套函数 w_i,φ_i 和 ψ_i,例如在过去的方法中若将 w_i 取成二次多项式,$\frac{\partial w_i}{\partial x}$ 必须是 x 的一次多项式,$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 必须不依赖于 x。现在我们可以将 w_i 取成常数,φ_i 取成一次多项式,ψ_i 取成二次多项式,只要当 $i\to\infty$时,$\varphi_i\to w_{0x},\psi_i\to w_{0xx}$ 就可以了。如果还要逼近 $w_0|_{\partial K}$, w_{0xx},w_{0xy} 和 w_{0yy},可以再在 ∂K 上取一套函数,在 K 上再取三套函数,一共变成七套函数,这些函数彼此独立,各有各的极限,因此叫作多套函数逼近方法。单套函数逼近显然是多套函数逼近的特例。

为了使这样定义的多套函数空间当 $i\to\infty$时能逼近 Sobolev 空间,由于多套函数的极限是一套函数,因此各套函数之间应该有某种关系。设 $u,v\in C^1(\bar{K})$,由分部积分公式可知

$$\int_K vD^{e_i}u\,dx=\int_{\partial K}vuN_i\,ds-\int_K D^{e_i}v\cdot u\,dx,\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{4.4.1}$$

其中 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),N_i=\cos(n,x_i)$, n 是K的外法线。若 $u\in C^2(K),v\in C^1(K)$,则

$$\int_K vD^{(2,0)}u\,dx=\int_{\partial K}vD^{e_1}uN_1\,ds-\int_K D^{e_1}vD^{e_1}u\,dx.\tag{4.4.2}$$

如图 4.4.3 取 n 为 ∂K 的外法线,s 为 ∂K 的切线方向,以逆时针方向为正向,显然

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=N_1\frac{\partial}{\partial n}-N_2\frac{\partial}{\partial s},\\ \frac{\partial}{\partial y}&=N_2\frac{\partial}{\partial n}+N_1\frac{\partial}{\partial s}.\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

将(4.4.3)代入(4.4.2)就有

$$\int_K vD^{(2,0)}u\,dx=\int_{\partial K}v\left(N_1\frac{\partial u}{\partial n}-N_2\frac{\partial u}{\partial s}\right)N_1\,ds$$

$$-\int_K D^{e_1}uD^{e_1}v\,dx,$$

类似地可以推出

$$\int_K 2vD^{(1,1)}u\,dx=\int_{\partial K}v\left[2N_1N_2\frac{\partial u}{\partial n}+(N_1^2-N_2^2)\frac{\partial u}{\partial s}\right]ds-\int_K(D^{e_2}vD^{e_1}u+D^{e_1}vD^{e_2}u)dx,$$

$$\int_K vD^{(0,2)}u\,dx=\int_{\partial K}v\left[N_2^2\frac{\partial u}{\partial n}+N_1N_2\frac{\partial u}{\partial s}\right]ds-\int_K D^{e_2}vD^{e_2}u\,dx.$$

综合以上所述,就有对任意 $u\in C^2(K), v\in C^1(\bar{K})$

$$\int_K v\begin{bmatrix}D^{(2,0)}u\\2D^{(1,1)}u\\D^{(0,2)}u\end{bmatrix}dx=\int_{\partial K}v\begin{bmatrix}N_1^2 & -N_1N_2\\2N_1N_2 & N_1^2-N_2^2\\N_2^2 & N_1N_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial n}\\\frac{\partial u}{\partial s}\end{bmatrix}ds-\int_K\begin{bmatrix}D^{e_1}v & 0\\D^{e_2}v & D^{e_1}v\\0 & D^{e_2}v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D^{e_1}u\\D^{e_2}u\end{bmatrix}dx, \tag{4.4.4}$$

用数学归纳法可以推出一般情形下的分部积分公式.

如果我们构造多套函数空间,用 $\{u_i^{10}\}$ 逼近 $D^{e_1}u$, $\{u_i^{01}\}$ 逼近 $D^{e_2}u$, $\{u_i^{20}\}$ 逼近 $D^{(2,0)}u$, $\{u_i^{11}\}$ 逼近 $D^{(1,1)}u$, $\{u_i^{02}\}$ 逼近 $D^{(0,2)}u$, $\{u_i^n\}$ 逼近 $\frac{\partial u_i}{\partial n}$, $\{u_i^s\}$逼近 $\frac{\partial u_i}{\partial s}$, $\{u_i^\partial\}$ 逼近 $u|_{\partial K}$. 这些多套函数的极限应该满足(4.4.4),不取极限时则应该近似地满足(4.4.4).

在实际问题中,我们常把 $\{u_i^a\}$ 取成多项式. 对 Ω 作有限元剖分 $\mathscr{K}$,设 $P(K)$ 和 $P(\partial K)$ 分别是K和 ∂K 上的多项式空间, $N_K^{(1,0)}, N_K^{(0,1)}, N_K^{(2,0)}, N_K^{(1,1)}, N_K^{(0,2)}$ 是 $P(K)$ 的有限维子空间, 定义线性插值算子. $\Pi_K^0: C^2(K)\to P(K)$, $\Pi_{\partial K}$, $\Pi_{\partial K}^N$, $\Pi_{\partial K}^s: C^2(K)\to$

$P(\partial K)$, $\Pi_K^{(1,0)}: C^2(K) \to N_K^{(1,0)}$; $\Pi_K^{(0,1)}: C^2(K) \to N_K^{(0,1)}$, $\Pi_K^{(2,0)}: C^2(K) \to N_K^{(2,0)}$; $\Pi_K^{11}: C^2(K) \to N_K^{(1,1)}$, $\Pi_K^{(0,2)}: C^2(K) \to N_K^{(0,2)}$. 对任意 $p \in N_K^{e_i}(i=1,2)$，有

$$\int_K p\Pi_K^{e_i} v dx$$

$$= \int_{\partial K} p\Pi_{\partial K} v N_i ds - \int_K D^{e_i} p \Pi_K^0 v dx. \qquad (4.4.5)$$

对任意 $p_1 \in N_K^{(2,0)}$、$p_2 \in N_K^{(1,1)}$、$p_3 \in N_K^{(0,1)}$ 都有

$$\int_K \begin{bmatrix} p_1 \Pi_K^{(2,0)} v \\ 2p_2 \Pi_K^{(1,1)} v \\ p_3 \Pi_K^{(0,2)} v \end{bmatrix} dx = \int_{\partial K} \begin{bmatrix} p_1 N_1^2 & -p_1 N_1 N_2 \\ 2p_2 N_1 N_2 & p_2(N_1^2 - N_2^2) \\ p_3 N_2^2 & p_3 N_1 N_2 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \Pi_{\partial K}^N v \\ \\ \Pi_{\partial K}^s v \end{bmatrix} ds - \int_K \begin{bmatrix} D^{e_1} p_1 & 0 \\ D^{e_2} p_2 & D^{e_1} p_2 \\ 0 & D^{e_1} p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_K^{e_1} v \\ \\ \Pi_K^{e_2} v \end{bmatrix} dx, (4.4.6)$$

这里 $\Pi_K^{e_i} v$ 用来逼近 $D^{e_i} v$，将 $v \in C^2(K)$ 用有限维多项式空间 $N_K^{e_i}$ 中的多项式 $\Pi_K^{e_i} v$ 来代替，$\Pi_K^{(2,0)} v$，$\Pi_K^{(1,1)} v$，$\Pi_K^{(0,2)} v$ 分别将 $v \in C^2(K)$用有限维多项式空间 $N_K^{(2,0)}, N_K^{(1,1)}, N_K^{(0,2)}$ 中的多项式来代替，分别用以逼近 $D^{(2,0)} v, D^{(1,1)} v$ 和 $D^{(0,2)} v$. 类似地用 $P(K)$ 中的多项式 $\Pi_K^0 v$ 逼近 v，用 $P(\partial K)$ 中的多项式 $\Pi_{\partial K} v$，$\Pi_{\partial K}^N v, \Pi_{\partial K}^s v$ 代替 $v|_{\partial K}, \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial K}, \left.\frac{\partial v}{\partial s}\right|_{\partial K}$，这些多项式的系数则由等式(4.4.5)和(4.4.6)决定.

为了阐述多套函数有限元逼近的意义，我们重新考察广义导数的定义. 设 $L_{loc}^1(\Omega)$ 表示Ω上局部可积函数的集合，由第三章(3.2.6)可知，Sobolev 意义下广义导数的定义为：设 $u \in L_{loc}^1(\Omega)$，α 是多重指标，如果存在 $u^\alpha \in L_{loc}^1(\Omega)$，有

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (4.4.7)$$

则称 u^α 是u的广义导数，记以 $D^\alpha u = u^\alpha$.

这个定义不用u在 $\partial\Omega$ 上的边界值，下面我们给出利用边界值 $u|_{\partial\Omega}$ 的定义，设Ω是n维 Euclid 空间中的有界域，边界 $\partial\Omega$

充分光滑，$N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)$ 是 Ω 边界的外法向量.

定义 设 $u\in L^1(\Omega)$，如果存在 $u^{e_i}\in L^1(\Omega)$ 及 $u^\partial\in L^1(\partial\Omega)$ 使得对一切 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u^\partial\varphi N_i ds-\int_\Omega u^{e_i}\varphi dx, \qquad (4.4.8)$$

则称 u^{e_i} 是 u 对 x_i 的一阶广义导数，记以 $u^{e_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，称 u^∂ 是 u 的边值，记以 $u|_{\partial\Omega}=u^\partial$. 高阶导数可以类似地定义，例如二阶导数可用(4.4.4)定义.

当 u 在 $\bar{\Omega}$ 上一次连续可微时，取 $u^{e_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，$u^\partial=u|_{\partial\Omega}$，(4.4.8)自然成立，因此新定义的导数是普通导数的推广. 由于(4.4.8)对任意 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$ 成立，自然对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立，从而(4.4.7)成立.因此如果一个函数具有新定义的广义导数，则必具有 Sobolev 意义的广义导数，并且二者相等. 由第三章 §3.2 可知，一个函数的弱导数(亦即 Sobolev 意义下的广义导数)是唯一的，从而新定义的广义导数也是唯一的. 由第三章(3.2.10)可知，具有一阶广义导数的函数边值也被确定. 反过来对边界充分光滑的区域 Ω，$C^1(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密，所以对任意 $u\in H^1(\Omega)$，存在 $u_n\in C^1(\bar{\Omega})$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n-u\|_{1,\Omega}\to 0$，从而 $\|D^{e_i}u_n-Du\|_{0,\Omega}\to 0$. 再由第三章不等式(3.2.10)存在常数 C 使得

$$\|u\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,\Omega}.$$

从而

$$\|u_n-u\|_{0,\partial\Omega}\leqslant C\|u_n-u\|_{1,\Omega},$$

于是 $\|u_n-u\|_{\partial\Omega}\to 0$. 由分部积分公式得

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u_n\varphi N_i ds$$

$$-\int_\Omega\varphi\frac{\partial u_n}{\partial x_i}dx, \forall\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

在两端令 $n\to\infty$ 得到

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\varphi N_i ds$$

$$- \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in C^{\infty}(\Omega).$$

从而 $u^0 = u|_{\partial\Omega}, u^{e_i} = D^{e_i}u$. 即由(4.4.8)定义的广义导数存在，这就是说若 $u \in H^1(\Omega)$，则 u 具有(4.4.8) 所定义的广义导数. 因此由(4.4.8)定义的广义导数与 Sobolev 定义下的广义导数等价. 新的广义导数定义比 Sobolev 的定义复杂，但在 Sobolev 的定义中 $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ 构造复杂，多项式甚至常数都不属于 $C_0^{\infty}(\Omega)$，而在新的定义中 $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$，这样的函数容易构造，所有的多项式都可以取作 φ.

多套函数有限元逼近(4.4.5)和(4.4.6)都是直接从广义导数定义出发(参见(4.4.8))来逼近广义导数，只不过将 $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$ 中的 $C^{\infty}(\Omega)$ 换成有限维空间 N_K^a. 就从导数定义来逼近导数这点来讲，多套函数逼近类似于差分法，从将无限维空间 $C^{\infty}(\Omega)$ 换成有限维空间 N_K^a 按矩量法逼近来讲，多套函数有限元逼近类似于 Galerkin 方法. 在实际构造逼近函数时，也可以只要求(4.4.5)和(4.4.6)近似地成立. 显然单套函数只是多套函数的特例，因此多套函数逼近是比单套函数逼近更广泛的方法. (4.4.5)和(4.4.6)直接按广义导数的定义对导数进行离散，是一种更直接的逼近广义导数的方法. 由于用 $\varphi \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ 代替 $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$，$N_K^a$ 是 $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ 的有限维子空间，使得这种构造方法简单易行.

多套函数有限元逼近的思想是由唐立民教授及其同事首先以力学的语言提出的，他们称之为拟协调元方法，多变量有限元方法. 张鸿庆将它推广并用数学语言给出这一方法，看成是直接从广义导数的定义出发近似广义导数. 张鸿庆、王鸣对这一方法进行了系统的工作，给出了多套函数有限元逼近的数学理论. 在这个理论中，需要对有限元作些限制，在多套函数逼近中单元之间可以不连续，但取极限时仍是一个连续体，单元之间的函数总有些藕断丝连，为了反映这个事实，我们引进了弱连续概念. 在 §4.2 中介

绍了仿射变换方法，这一方法是个有用的技巧，但使用时要求单元具有仿射不变性. 许多单元例如 Morley 元不具有这种不变性，为了克服这个缺点，我们引进了仿射连续性和尺度不变性. 假定单元在仿射变换下是连续的，在尺度变换（也就是相似变换)下是不变的. 上一节中讲的广义分片检验在理论上很漂亮，但实用上很不方便. 我们提出一种更便于使用的检验. 此外，还假定单元满足其它一些必要的条件例如单元秩条件. 可以验证大多数常见的单元都能满足这些条件.

从前面章节的叙述中，可以看到嵌入性，紧致性，逼近性和弱闭性等的重要性. 在对单元作了上面所说到的一些不苛刻的限制后，我们证明了多套函数有限元空间的嵌入性，紧致性，逼近性和弱闭性. 以这些结果为基础，对广泛的一类单元证明了多套函数有限元逼近的收敛性并给出了误差估计.

本书的后半部分将介绍这些工作.

第五章 有限元空间

求解一个微分方程的定解问题的有限元方法可分为三个主要部分：(1) 将微分方程化为弱形式的变分方程；(2) 构造有限元空间；(3) 求解线性或非线性代数方程组。本章讨论有限元空间的构造方法。

有限元空间是 Sobolev 空间的有限维近似，也就是要给出 Sobolev 空间中的函数及其导数的近似形式。先把 Sobolev 空间中函数的定义域化为有限个子域，每个子域称为一个单元，这一步骤称为有限元剖分。第一节讨论有限元剖分，并在第二节讨论与剖分的单元相关的仿射变换技巧，然后在每个单元上给出函数及其导数的近似形式，通常是多项式。这样整个区域上函数及其导数的近似形式就确定了。第三，四节分别给出用于近似 Sobolev 空间 $W^{1,\sigma}(\Omega)$ 和 $W^{2,\sigma}(\Omega)$ 的有限元空间的构造。如果读者对有限元的数字理论证明不感兴趣，可以从第一节的前半部分直接跳到第三、四节。

在正文开始之前，先介绍一些符号和概念。记R^n 是 n 维Euclid空间，R^n 中的点 x 记为列向量，即 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$。称分量为非负整数的 n 维行向量为 n 重指标，如无特殊说明，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$\gamma=(r_1,\cdots,r_n)$ 总表示 n 重指标，记 $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$。记 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，当 $i\neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$，$\delta_{ii}=1$。令 $e_i=(\delta_{1i},\delta_{2i},\cdots,\delta_{ni})$，$1\leqslant i\leqslant n$。用 D^α 表示导数算子 $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，用 ∂_i 记 $\frac{\partial}{\partial x_i}$。对 $T\in R^n$，$T\neq 0$，记

$$\frac{\partial}{\partial T}=(\partial_1,\cdots,\partial_n)\cdot T=\sum_{i=1}^{n}T_i\partial_i.$$

令Ω是 R^n 中的连通的区域，对 $m \geqslant 1$，$\sigma \in [1, \infty]$，用 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 记 Sobolev 空间，即 $W^{m,\sigma}(\Omega) = \{u | u \in L^\sigma(\Omega)$ 且 $D^\alpha u \in L^\sigma(\Omega), |\alpha| \leqslant m\}$. Sobolev 范数和半范如下定义：对 $u \in W^{m,\sigma}(\Omega)$，

$$\sigma < \infty, \quad \|u\|_{m,\sigma,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$|u|_{m,\sigma,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\sigma = \infty, \quad \|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| = m} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

记 $\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,\sigma,\Omega}$ 下完备化得到的空间. $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 和 $\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$ 都是 Banach 空间，$\sigma = 2$ 时是 Hilbert 空间.

记 $N = (N_1, \cdots, N_n)^T$ 是 $\partial\Omega$ 光滑点处的单位外法向量. $n = 2$ 时，记 s 是 $\partial\Omega$ 的单位切向向量，切向以逆时针方向为正. 本书的后半部分，在无说明的情况下，C 代表与 h 无关的正常数，不同位置其值可以不同.

§5.1 区域的有限元剖分

构造有限元空间的第一步是先将区域分成有限个子域，即进行有限元剖分.

设Ω是 R^n 中的有界区域，Ω具有 Lipschitz 连续的边界 $\partial\Omega$. 有限元方法的逼近精度取决于单元的尺度和单元上的函数近似形式. 要得到高精度的近似，区域的剖分就要越密，所以要取一个刻划单元尺度的参数 h.

对于 $h \in (0,1)$，称 K_h 是Ω的一个有限元剖分，是指把 $\bar{\Omega}$分成有限个闭子集 K，每个 K 称为一个单元，K_h是由这些单元构成的集合. 因为目的是把函数及导数的逼近形式在每个单元上确定，然

后整个区域上的逼近形式就确定了，所以有限元剖分 K_h 应具有下述性质：1) $\bar{\Omega}=\bigcup_{K\in K_h} K$；2) K_h 中的单元K的内点集$\underline{K}$非空；3) K_h 中任意两相异单元 K_1, K_2 的内点集的交 $\underline{K}_1\cap\underline{K}_2$ 是空集.

从实用的角度来看，单元越简单越容易刻划好. R^n 中简单的闭区域有单纯形，矩形和凸多胞形等. 现在介绍这些概念.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in R^n$，记它们的闭凸包为$G$，即 $G=\left\{x\,|\,x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right\}$. 如果$G$是$r$维的，称$G$是一个$r$维凸多胞形，当 $r=n$ 时，简称为凸多胞形. $n=2$ 时，凸多胞形就是凸多边形. 称超平面H是G的一个支撑平面，如果 $H\cap\underline{G}$ 是空集，而 $H\cap G$ 非空. 称F是G的一个r维表面，如果存在G的支撑平面H使得 $F=G\cap H$ 是r维的. 1 维表面称为边，0 维表面称顶点.

若凸多胞形是由 $n+1$ 个点构成的集合的闭凸包，则称之为单纯形，若这 $n+1$ 个点为 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 则 $a_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$ 都是单纯形的顶点，单纯形的形心是 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}a_i$. 单纯形在 $n=2$ 时是三角形，$n=3$ 时是四面体.

如果给定线性无关的点 $a_i\in R^n$，$1\leqslant i\leqslant n$，及 $x^0\in R^n$，则称集合 $P=\left\{x\,|\,x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i+x^0,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$ 是一个顶点在 x^0 的平行多面体. 它的形心是 $x^0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$. 不难验证$P$也是一个凸多胞形. $n=2$ 时，平行多面体就是平行四边形，$n=3$ 时就是平行六面体. 如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是相互正交的，则称P是矩形，进一步如 $a_1,\cdots,a_n$ 的长度相等，则称P是边长为 $\|a_1\|$ 的立方体.

对任意一个多胞形 G，记 ρ_G 是包含在G中的球的直径的上界，称为G的内径；记 h_G 是包含G的球的直径的下界，称为G的

外径.

称Ω是多胞形域，如果Ω的闭包 $\bar{\Omega}$ 是有限个凸多胞形的并集.

由于单纯形，平行多面体是 R^n 中最简单的闭集，而且容易描述，所以通常采用它们做单元. 对于多胞形域Ω及 $h\in(0,1)$，取 K_h 是Ω的一个有限元剖分. 如果没有特殊说明，本书总假定 $\{K_h\}$ 具有下述性质:

K1：对所有的 $h\in(0,1)$，K_h 中的单元均是单纯形，或者对所有的 $h\in(0,1)$，K_h 中的单元均是平行多面体；且对 $h\in(0,1)$，

$$\bigcup_{K\in K_h} K=\bar{\Omega}.$$

K2：K_h 中任意两相异单元的交集或是空集或是它们的一个公共 r 维表面，$0\leqslant r\leqslant n-1$.

K3：存在与 h 无关的正数 η 使得 $\eta h\leqslant\rho_K<h_K\leqslant h,\quad\forall K\in K_h$ 及 $h\in(0,1)$ 成立.

性质 K2 的要求是从单元间的对称性考虑出发的. 在图 5.1.1 的情形 (b)，K2 不成立，K_1 的一条边是 K_2 的一条边和 K_3 的一条边的并集. 相反，K_2 和 K_3 的边却是 K_1 的一条边的一部分. 这三个单元没有处于同等的地位. 性质 K3 的要求是单元的尺寸要具有一定的均匀性.

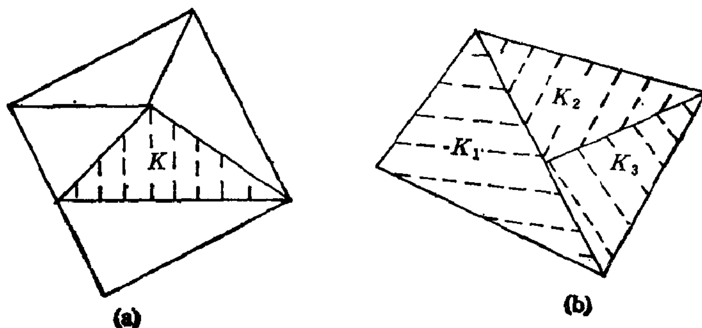


图 5.1.1

一般地，对多胞形域 Ω，如果 K_h 中的单元都是单纯形，可以有满足 K1—K3 的有限元剖分族. 在平行多面体的情形，K1 和 K2 不一定成立，这要看具体情况. 如果 Ω 不是多胞形域，性质 K1—K3 就不可能成立了. 此时有两种处理办法：一是用一个多胞形 Ω' 代替 Ω，在 Ω' 上考虑问题；一是采用曲边有限元剖分.

为了考虑有限元空间的性质需要一些与 K_h 有关的结果. 对数学证明不感兴趣的读者可越过下面一段，直到第三节.

设 Ω 是多胞形域，K_h 是 Ω 的一族满足 K1—K3 的有限元剖分. 对 $h\in(0,1)$，由剖分 K_h 可以定义 Ω 的一个子集：$\Omega_h=\bigcup\limits_{K\in K_h}\underline{K}$. 显然

$$\bar{\Omega}_h=\bar{\Omega},\ \Omega_h\subset\Omega\subset\bar{\Omega},\ \forall h\in(0,1). \qquad (5.1.1)$$

K_h 中的单元 K 的边界 ∂K 是由有限个 K 的 $(n-1)$ 维表面 F 构成的. 令 $\mathscr{F}_h$ 是 K_h 中所有单元的 $(n-1)$ 维表面的全体构成的集合. 即 $\mathscr{F}_h$ 中的元素 F 是 $(n-1)$ 维多胞形，且存在 $K\in K_h$ 使得 F 是 K 的 $(n-1)$ 维表面. 由于性质 K2，任意两相异单元没有共同的内点，利用(5.1.1)式可得 Ω_h 的边界 $\partial\Omega_h$ 的表达式

$$\partial\Omega_h=\bar{\Omega}-\Omega_h=\bigcup_{F\in\mathscr{F}_h}F,\ h\in(0,1). \qquad (5.1.2)$$

由(5.1.1)和(5.1.2)式可得 $\partial\Omega\subset\partial\Omega_h$.

称 $\mathscr{F}_h$ 中元素 F 是自由的，如果 $F\subset\partial\Omega$，否则称为单元内表面.

引理 5.1.1 $\forall F\in\mathscr{F}_h$，$F$ 或包含于 $\partial\Omega$，或者是 K_h 中的两相异单元的公共 $(n-1)$ 维表面，即单元内表面. 进而 $\partial\Omega$ 是所有 K_h 中的单元的自由 $(n-1)$ 维表面的并集.

证明 (1) 记 $\mathrm{ri}F$ 是 F 的相对内点集. 令 $F\in\mathscr{F}_h$，于是 $F\subset\partial\Omega$ 或者 $\mathrm{ri}F\subset\Omega$. 事实上，若 F 不包含于 $\partial\Omega$，则存在点 $x\in\Omega\cap\mathrm{ri}F$ 和 $K\in K_h$，使得 $F\subset\partial K$，存在一列 $x_t\in\Omega$ 且 $x_t\bar{\in}K$，$t=1,2,\cdots$，而当 $t\to\infty$ 时，$x_t\to x$. 因为 K_h 是 Ω 的有限覆盖，所以存在 $K'\in K_h$ 使得 $\{x_t\}$ 的一个子列(仍记为 $\{x_t\}$) 包

含于 K' 中. 由于 K' 是闭的, $K' \neq K$, 所以 $x \in K'$, 进而 $x \in K \cap K'$. 由 K2, $K \cap K'$ 是K和 K' 的公共表面. 因为 $x \in \mathrm{ri}F \subset \partial K$, 所以 $F = K \cap K'$, $F \subset \partial K \cap \partial K'$, 所以 $\mathrm{ri}F \subset (\underline{K \cup K'}) \subset \Omega$.

(2) 显然, $\mathrm{ri}F$ 在F中稠密. 由(5.1.2)式可知集 $D = \bigcup_{F \in \mathscr{F}_h} \mathrm{ri}F$ 在 $\partial\Omega_h$ 中稠密, $D \cap \partial\Omega$ 在 $\partial\Omega_h$ 的子集 $\partial\Omega$ 中稠密. 进而由 (1) 可知

$$D \cap \partial\Omega = \bigcup_{F \in \mathscr{F}_h} (\mathrm{ri}F \cap \partial\Omega) = \bigcup_{F \in \mathscr{F}_h, F \subset \partial\Omega} \mathrm{ri}F.$$

由此可得 $\partial\Omega = \partial\Omega \cap D$ 的闭集 $= \bigcup_{F \in \mathscr{F}_h, F \subset \partial\Omega} F$. 证毕.

对于 $K \in K_h$, 记 $|K|$ 是K的体积, ω_n 是 R^n 中直径为 1 的球的体积. 由 K3 可得

$$\omega_n \eta^n h^n \leqslant |K| \leqslant \omega_n h^n. \tag{5.1.3}$$

对 R^n 中的任意子集 S, 记 $K_h(S)$ 是所有与S有非空交集的单元 $K \in K_h$ 构成的集合. 特别地,当 $x \in \bar{\Omega}$ 时,有

$$K_h(x) = \{K | K \in K_h \text{ 且 } x \in K\}. \tag{5.1.4}$$

如果 $x \in \underset{\circ}{K}$, $K \in K_h$, 则 $K_h(x)$ 只包含一个单元 K. 如果 x 在单元内表面上,那么 $K_h(x)$ 包含不只一个单元, 单元的数目是有上限的.

引理 5.1.2 $\forall x \in \bar{\Omega}$, $K_h(x)$ 中的单元个数不超过 $(2/\eta)^n$.

证明 令 $x \in \bar{\Omega}$, $\forall K \in K_h(x)$, K 的外径 $h_K \leqslant h$, 所以所有 $K_h(x)$ 中K都包含于以x为心, h为半径的球中. 由性质 K2, 每对相异的单元没有共同的内点,利用(5.1.3)式得

$$\nu\omega_n(\eta h)^n \leqslant \sum_{K \in K_h(x)} |K| = \left| \bigcup_{K \in K_h(x)} K \right| \leqslant \omega_n(2h)^n,$$

其中 ν 是 $K_h(x)$ 中单元个数. 显然 $\nu \leqslant (2/\eta)^n$.

称 $K_h(x)$ 是强连接的,如果对每两个单元K和 $K' \in K_h(x)$, 存在一列互不相同的单元 $K_0, K_1, \cdots, K_l \in K_h(x)$, 使得 $K_0 = K$, $K_l = K'$, 且 $K_i \cap K_{i+1}$ 具有公共的 $(n-1)$ 维表面, $S =$

$0,1,\cdots,l-1$.

引理 5.1.3 $\forall x\in\Omega$，集 $K_h(x)$ 都是强连接的.

证明 令 K_0 是 $K_h(x)$ 中的任意单元，$\mathscr{L}(K_0)$ 是所有与 K_0 强连接的单元 $K\in K_h(x)$ 构成的集合，即对于 $K\in\mathscr{L}(K_0)$，存在一列互不相同的单元 $K_1,\cdots,K_{l-1},K_l=K$，使得 $K_s\cap K_{s+1}$ 具有公共的 $(n-1)$ 维表面，$s=0,1,\cdots,l-1$. 可以断言 $\mathscr{L}(K_0)=K_h(x)$，否则，存在 $K'\in K_h(x)$ 不属于 $\mathscr{L}(K_0)$. 利用性质 K2，K' 与与集 $M=\bigcup\limits_{K\in\mathscr{L}(K_0)}K$ 的交集是 K' 的边界 $\partial K'$ 的子集. 由于 K' 是凸的，具有内点，在 x 点的任意邻域内都有不属于M的点，所以 x 是在M的边界 ∂M 上. 显然 M是凸多胞形域，$\mathscr{L}(K_0)$ 是它的一个有限元剖分. 应用引理 5.1.1 可知，存在 $\mathscr{L}(K_0)$ 中的单元 K_1 及 K_1 的一个 $(n-1)$ 维表面 F，使得 $x\in F$ 且 $F\subset\partial M$. 因为 $x\in\Omega$，所以 $F\not\subset\partial\Omega$. 应用引理 5.1.1 于 Ω，得到一个 $K_2\in K_h$，$K_2\neq K_1$，满足 $F=K_1\cap K_2$. 因为 $x\in F_2$，所以 $x\in K_2$，即 $K_2\in K_h(x)$. 最终 K_1，$K_2\in\mathscr{L}(K_0)$，所以 F不是M中的 K_1 的一个自由表面，也就是 $F\not\subset\partial M$. 矛盾. 证毕.

设 a,b 是两个点，线段 $\overline{ab}\subset\Omega$. $\forall h\in(0,1)$，Ω的有限元剖分 K_h 可以引进 $\overline{ab}$ 的一个剖分 $\mathscr{S}_h$. 它由一组非空的相互不同的子线段

$$I=K\cap\overline{ab},\ K\in K_h \tag{5.1.5}$$

构成. 因为K是凸的，I 也是凸的，是 $\overline{ab}$ 的一个闭的子区间. 可以证明 $\overline{ab}$ 的有限元剖分 $\mathscr{S}_h$ 具有与 $K1$ 和 $K2$ 类似的性质.

引理 5.1.4 下述表述为真:

$$\overline{ab}=\bigcup_{I\in\mathscr{S}_h}I, \tag{5.1.6}$$

且对 $\mathscr{S}_h$ 的任意两相异单元，它们的交集或是空集或者只有一个点.

证明 表达式 (5.1.6) 由 K_h 满足性质 K1 可得. 设 $I,I'\in$

$\mathscr{S}_k$ 是任意两条子线段，则 $I\cap I'$ 或者是空的，或者包含一个点，或者包含至少两点。在 $I\cap I'$ 中至少有两个点时，它是 $\overline{ab}$ 的一个子区间且有相对内点 $C\in I\cap I'$。相应的单元 K, K' 具有非空的交集 $F=K\cap K'$。因为 $I\neq I'$，$K\neq K'$，所以由 K2，F 是 K 和 K' 的表面。线段 $I\subset K$ 且相对内点 C 属于 K 的表面 F，所以 I 一定是 F 的子集。相应地，$I'\subset K'$, $C\in F$ 给出 $I'\subset F$。因而 $I\subset I\cap I'$，$I'\subset I\cap I'$，即 $I\subset I'$, $I'\subset I$。与 $I\neq I'$ 矛盾。引理得证。

引理 5.1.1 至引理 5.1.4 的证明引自 Stummel 的工作[63]。

在本节结束之前，我们给出线段性质和锥性质的概念。称区域 Ω 具有线段性质，如果对于 $\forall x\in\partial\Omega$，存在一个开集 U_x 和一个非零向量 y_x，使得 $x\in U_x$，且当 $z\in\bar{\Omega}\cap U_x$ 时，$\forall t\in(0,1)$，$z+ty_x\in\Omega$。

令 $x\in R^n$, B' 是以 x 为心的开球，B'' 是不包含 x 的开球，称集合 $C_x=B'\cap\{z\,|\,z=x+\lambda(y-x),\ y\in B_2, \lambda>0\}$ 是顶点在的 R^n 内的有限锥。对于 C_x，存在一个正数 H 和一个单位球面上的开集 A 使得 $C_x=\{y\,|\,y\in R^n, 0<\|y-x\|<H, (y-x)/\|y-x\|\in A\}$。

称区域 Ω 具有锥性质，如果存在有限锥 C，使得 $\forall x\in\Omega$，x 是一个包含于 Ω 内且全等于 C 的有限锥的顶点。

可以验证，当 Ω 是多胞形域时，Ω 具有线段性质和锥性质。

§ 5.2 仿射变换的技巧

要给出定义在 Ω 上的函数及其导数的逼近形式，要在一系列的单元给出函数及其导数的逼近形式，而且逼近形式的精度与单元的尺寸及多项式次数有关。能不能把一系列单元化成一个固定单元进行讨论？能不能有一个简单判别方法直接可以看出逼近精度？本节的内容就是回答这些问题的基础。

称 R^n 中的子集 G, $\hat{G}$ 是仿射等价的，如果存在仿射变换

$$F: \hat{x} \in R^n \to F(\hat{x}) = B\hat{x} + b \in R^n \qquad (5.2.1)$$

使得 $G = F\hat{G}$。这里B是 $n \times n$ 可逆矩阵，$b \in R^n$。

记 $\|B\|$ 是矩阵B的 Euclid 范数，$\det B$ 是B的行列式。现在考虑 $\|B\|$ 和 $\det B$ 用G和 $\hat{G}$ 的几何尺寸的估计。

引理 5.2.1 设G和 $\hat{G}$ 是多胞形，G和 $\hat{G}$ 是仿射等价的，即存在 $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ 使得 $G = F\hat{G}$。则下述估计成立：

$$\|B\| \leqslant \frac{h_G}{\rho_{\hat{G}}}, \quad \|B^{-1}\| \leqslant \frac{h_{\hat{G}}}{\rho_G}, \qquad (5.2.2)$$

$$|\det B| \leqslant C\left(\frac{h_G}{\rho_{\hat{G}}}\right)^n, \quad |\det B^{-1}| \leqslant C\left(\frac{h_{\hat{G}}}{\rho_G}\right)^n, \qquad (5.2.3)$$

其中C是只与n有关的正数。

证明 显然有

$$\|B\| = \frac{1}{\rho_{\hat{G}}} \sup_{\|\xi\| = \rho_{\hat{G}}} \|B\xi\|,$$

给定了 $\xi \in R^n$，$\|\xi\| = \rho_{\hat{G}}$，存在 $\hat{y}$，$\hat{z} \in \hat{G}$ 使得 $\xi = \hat{y} - \hat{z}$。这是因为 $\rho_{\hat{G}}$ 是 $\hat{G}$ 所含的最大球的直径。因为 $B\xi = F(\hat{y}) - F(\hat{z})$，$F(\hat{y}), F(\hat{z}) \in G$，所以 $\|B\xi\| \leqslant h_G$。即(5.2.2)式的第一个不等式成立。类似地可证明第二个不等式。

记 $\|B\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n} |B_{ij}|$，其中 $B = (B_{ij})$，则

$$|\det B| \leqslant n!\|B\|_\infty^n.$$

$\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|$ 是等价的，所以由上式和(5.2.2)式得到(5.2.3)的第一个不等式。第二个不等式类似地可得。证毕。

设G和 $\hat{G}$ 是仿射等价的。对定义在G上的函数 v，令 $\hat{v} = v \cdot F$ 是定义在 $\hat{G}$ 上的函数，即

$$x = F(\hat{x}) \text{ 时，} v(x) = \hat{v}(\hat{x}). \qquad (5.2.4)$$

引理 5.2.2 令G和 $\hat{G}$ 是仿射等价的多胞形。对 $m \geqslant 0, \sigma \in [1, \infty]$，若 $v \in W^{m,\sigma}(G)$，则 $\hat{v} = v \cdot F \in W^{m,\sigma}(\hat{G})$。而且存在只与 m, n 有关的常数C使得下述不等式成立：

$$|\hat{v}|_{m,\sigma,\hat{G}} \leqslant C\|B\|^m |\det B|^{-\frac{1}{\sigma}} |v|_{m,\sigma,G}, \ \forall v \in W^{m,\sigma}(G),$$

(5.2.5)

$$|v|_{m,\sigma,G} \leqslant C\|B^{-1}\|^m |\det B|^{\frac{1}{\sigma}} |\hat{v}|_{m,\sigma,\hat{G}}, \forall \hat{v} \in W^{m,\sigma}(\hat{G}). \tag{5.2.6}$$

证明 首先设 $v \in C^m(G)$，于是 $\hat{v} \in C^m(\hat{G})$。对于 $j_1, \cdots, j_m \in \{1,2,\cdots,n\}$，记 $\partial x_{j_1} \cdots x_{j_m} = \dfrac{\partial^m}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}}, \partial \hat{x}_{j_1} \cdots \hat{x}_{j_m} = \dfrac{\partial^m}{\partial \hat{x}_{j_1} \cdots \partial \hat{x}_{j_m}}$。利用导数链法则可知，对于$j_1, \cdots, j_m \in \{1, \cdots, n\}$，

$$\partial \hat{x}_{j_1} \cdots \hat{x}_{j_m} \hat{v}(\hat{x}) = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{m} B_{i_k,j_k}\right) \partial x_{i_1} \cdots x_{i_m} v(x). \tag{5.2.7}$$

于是

$$|\partial \hat{x}_{j_1} \cdots \hat{x}_{j_m} \hat{v}(\hat{x})| \leqslant n^m \|B\|_\infty^m \sum_{|\beta|=m} |D_x^\beta v(x)|. \tag{5.2.8}$$

由上式可得，当 $\sigma < \infty$ 时，

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,\sigma,\hat{G}} &= \left(\int_{\hat{G}} \sum_{|\beta|=m} |D_{\hat{x}}^\beta \hat{v}(\hat{x})|^\sigma d\hat{x}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\leqslant C(m,n)\|B\|_\infty^m \\ &\quad \times \left(\int_{\hat{G}} \sum_{|\beta|=m} |D_x^\beta v(x)|^\sigma d\hat{x}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

其中，若记M是 $\{\beta \mid |\beta| = m\}$ 的维数，则 $C(m, n) = n^m M \sup\limits_{\sigma \geqslant 1} M^{\frac{1}{\sigma}}$。在(5.2.9)式右端的积分中做坐标变换 $\hat{x} = B^{-1}(x - b)$，注意

$$d\hat{x} = |\det B^{-1}| dx, \quad |\det B^{-1}| = |\det B|^{-1}. \tag{5.2.10}$$

进而得到

$$|\hat{v}|_{m,\sigma,\hat{G}} \leqslant C(m,n)\|B\|_\infty^m |\det B|^{-\frac{1}{\sigma}} |v|_{m,\sigma,G}. \tag{5.2.11}$$

利用矩阵范数 $\|\cdot\|_\infty$ 与 $\|\cdot\|$ 的等价性，可以得到

$$|\hat{v}|_{m,\sigma,\hat{G}} \leqslant C\|B\|^m|\det B|^{-\frac{1}{\sigma}}|v|_{m,\sigma,G}, \qquad (5.2.12)$$

$\forall v \in C^m(G)$ 成立.

当 $\sigma<\infty$ 时,线性算子 $\tau: v \in C^m(G) \to v \in W^{m,\sigma}(G)$ 在范数 $\|v\|_{m,\sigma(G)}$ 和 $\|\hat{v}\|_{m,\sigma,\hat{G}}$ 意义下都是连续的,且 $C^m(G)$ 在 $W^{m,\sigma}(G)$ 中稠密,所以(5.2.5)式成立. 如果 $\sigma=\infty$,则由(5.2.8)式得

$$\sum_{|\beta|=m}|D_{\hat{x}}^{\beta}\hat{v}(\hat{x})| \leqslant C_1(m,n)\|B\|_{\infty}^m|v|_{m,\infty,G}, \forall \hat{x} \in \hat{G}, \qquad (5.2.13)$$

其中 $C_1(m,n)=n^m M^2$. 进而得(5.2.5)式.

类似地可以证明不等式(5.2.6). 证毕.

引理 5.2.2 给出了 G 上的函数及其在 $\hat{G}$ 上相应的函数的 Sobolev 半范数估计. 后面的讨论还将用到 ∂G 上的函数及其在 $\partial\hat{G}$ 上相应的函数的 L^σ 范数的估计. 为此需要 ∂G 上的面积元 ds 与 $\partial\hat{G}$ 上的面积元 $d\hat{s}$ 的关系以及 ∂G 在某点的单位外法线向量 N 与在 $\partial\hat{G}$ 上相应点处的单位外法线向量 $\hat{N}$ 的关系.

引理 5.2.3 令 G 和 $\hat{G}$ 是仿射等价的多胞形,则在 ∂G 的光滑点处,有

$$N = B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|, \qquad (5.2.14)$$

$$ds = |\det B|\|B^{-T}\hat{N}\|d\hat{s}. \qquad (5.2.15)$$

证明 (1) 设在 $\hat{x}$ 点附近 $\partial\hat{G}$ 可以表示成: $H(\hat{x})=0$. 于是在点 $\hat{x}$ 处的法线向量是

$$\hat{\nu} = (\partial_{\hat{x}_1}H, \partial_{\hat{x}_2}H, \cdots, \partial_{\hat{x}_n}H)^T, \qquad (5.2.16)$$

所以单位外法向量 $\hat{N}=\hat{\delta}\hat{\nu}/\|\hat{\nu}\|$. 这里 $\hat{\delta}$ 是 1 或 -1. 类似地,在 $x=F(\hat{x})$ 点附近,∂G 可以表示成 $H(B^{-1}(x-b))=0$. 在 x 处的法线方向是

$$\nu = B^{-T}\hat{\nu}, \qquad (5.2.17)$$

因此 $N=\delta B^{-T}\hat{\nu}/\|B^{-T}\hat{\nu}\|=\delta\hat{\delta}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|$, 这里 δ 可能是 1 或 -1, 事实上 $\delta\hat{\delta}=1$, 否则, $N=-B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|$. 由于 N

是外法向量，当 t 足够小且大于 0 时，$x+tN\bar{\in}G$. 于是 $F^{-1}(x+tN)=\hat{x}-tB^{-1}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|\bar{\in}\hat{G}$. 由于 $\hat{N}^TB^{-1}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|>0$，所以 $B^{-1}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|$ 与 $\hat{N}$ 的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 注意 $\hat{N}$ 是 $\hat{x}$ 点处的外法向量，所以 $-tB^{-1}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|$ 与 $\hat{N}$ 的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$. 故当 t 足够小时，$\hat{x}-tB^{-1}B^{-T}\hat{N}/\|B^{-T}\hat{N}\|\in\hat{G}$. 矛盾.这样就证明得(5.2.14)式

(2) 设 $\partial\hat{G}$ 在 $\hat{x}$ 处的面积元为 $d\hat{s}$，而在 x 处 ∂G 的面积元 $ds=\theta(\hat{x})d\hat{s}$. 由于 ∂G, $\partial\hat{G}$ 分片光滑，对 $\forall\hat{\varphi}\in C^\infty(\hat{G})$，由 Green 公式及(5.2.14)式得

$$\int_G D_x^{e_i}\varphi dx=\int_{\partial G}\varphi N_i ds=\int_{\partial\hat{G}}\hat{\varphi}(B^{-T}\hat{N})_i\theta(\hat{x})d\hat{s}/\|B^{-T}\hat{N}\|$$

$$\int_G D_x^{e_i}\varphi dx=\int_{\hat{G}}(B^{-T}D_{\hat{x}}\hat{\varphi})_i|\det B|d\hat{x}$$

$$=|\det B|\int_{\partial\hat{G}}\hat{\varphi}(B^{-T}\hat{N})_i d\hat{s},$$

其中 $D_{\hat{x}}=(D_{\hat{x}}^{e_1},\cdots,D_{\hat{x}}^{e_n})^T$. 综合两式得

$$\int_{\partial\hat{G}}\hat{\varphi}(B^{-T}\hat{N})_i\left(\frac{\theta(\hat{x})}{\|B^{-T}\hat{N}\|}-|\det B|\right)d\hat{s}=0.$$

由于 i 可取 1 至 n，所以

$$(0,\cdots,0)^T=\int_{\partial G}\hat{\varphi}B^{-T}\hat{N}\left(\frac{\theta(\hat{x})}{\|B^{-T}\hat{N}\|}-|\det B|\right)d\hat{s}$$

$$=B^{-T}\int_{\partial G}\varphi\hat{N}\left(\frac{\theta(\hat{x})}{\|B^{-T}\hat{N}\|}-|\det B|\right)d\hat{s},$$

$$\int_{\partial\hat{G}}\hat{\varphi}\hat{N}_j\left(\frac{\theta(\hat{x})}{\|B^{-T}N\|}-|\det B|\right)d\hat{s}=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n \tag{5.2.18}$$

至少有一个 $\hat{N}_j\neq0$，且在 $\hat{x}$ 的一个邻域内 $\hat{N}_j$ 是连续的. 由 $\hat{\varphi}$ 的任意性得 $\theta(\hat{x})=\|B^{-T}\hat{N}\||\det B|$，即(5.2.15)式成立.

引理 5.2.4 设 $\sigma\in[1,\infty]$，G 和 $\hat{G}$ 是两个仿射等价的多胞

形. 若 $v \in L^\sigma(\partial G)$，则 $\hat{v} = v \cdot F \in L^\sigma(\partial \hat{G})$，且存在只与 n 有关的常数 C 使得

$$\|\hat{v}\|_{0,\sigma,\partial\hat{G}} \leqslant C\|B\|^{\frac{1}{\sigma}}\|B^{-1}\|^{\frac{n}{\sigma}}\|v\|_{0,\sigma,\partial G}, \quad \forall v \in L^\sigma(\partial G), \tag{5.2.19}$$

$$\|v\|_{0,\sigma,\partial G} \leqslant C\|B^{-1}\|^{\frac{1}{\sigma}}\|B\|^{\frac{n}{\sigma}}\|\hat{v}\|_{0,\sigma,\partial\hat{G}}, \quad \forall \hat{v} \in L^\sigma(\partial \hat{G}). \tag{5.2.20}$$

证明 利用(5.2.15)式可得

$$\begin{aligned}\|v\|^\sigma_{0,\sigma,\partial G} &= \int_{\partial G} |v|^\sigma ds = \int_{\partial\hat{G}} |\hat{v}|^\sigma |\det B|\,\|B^{-T}\hat{N}\|d\hat{s} \\ &\leqslant |\det B|\,\|B^{-1}\|\int_{\partial\hat{G}} |\hat{v}|^\sigma d\hat{s}.\end{aligned}$$

注意 $|\det B| \leqslant C\|B\|^n$，所以(5.2.20) 式成立. 类似地可以证明(5.2.19)式成立.

下面讨论两类特殊的等价类：单纯形和平行多面体.

对 R^n 中任意的单纯形 K，记K的 $n+1$ 个顶点 为 $a_j = (a_{ij})$，$1 \leqslant j \leqslant n+1$. 对于点 $x \in R^n$，对应于 $(n+1)$ 个点 a_j 的重心坐标 $\lambda_j = \lambda_j(x)(1 \leqslant j \leqslant n+1)$ 是下述线性方程组的唯一解：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}\lambda_j = x_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1.\end{cases} \tag{5.2.21}$$

记上述方程组的矩阵为 A,其逆记为 $A^{-1} = (a^{ij})$,则

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a^{ij}x_j + a^{i,n+1}, 1 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{5.2.22}$$

$n = 2$ 时,重心坐标也称为面积坐标.

对于单纯形，取 $\hat{K}$ 是下述单位单纯形，它的 $n+1$ 个顶点是

$$
\begin{cases}
\hat{a}_1 = (1,0,\cdots,0)^T, \\
\hat{a}_2 = (0,1,\cdots,0)^T, \\
\quad\vdots \\
\hat{a}_n = (0,0\cdots,1)^T, \\
\hat{a}_{n+1} = (0,0,\cdots,0)^T.
\end{cases}
\tag{5.2.23}
$$

$\hat{K}$ 的重心坐标有简单的形式

$$
\lambda_i = x_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \lambda_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{5.2.24}
$$

对于以 $a_j = (a_{ij}), 1 \leqslant j \leqslant n+1$, 为顶点的单纯形 K,定义仿射变换 $F_K: \hat{K} \to K$ 如下:

$$
F_K \hat{x} = B_K \hat{x} + b_K, \quad \hat{x} \in \hat{K}, \tag{5.2.25}
$$

其中

$$
B_K = \begin{pmatrix}
a_{11} - a_{1,n+1} & \cdots & a_{1n} - a_{1,n+1} \\
a_{21} - a_{2,n+1} & \cdots & a_{2n} - a_{2,n+1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} - a_{n,n+1} & \cdots & a_{nn} - a_{n,n+1}
\end{pmatrix},
$$

$$
b_K = \begin{pmatrix}
a_{1,n+1} \\
a_{2,n+1} \\
\vdots \\
a_{n,n+1}
\end{pmatrix}. \tag{5.2.26}
$$

显然 B_K 是可逆的. 不难验证

$$
F_K \hat{a}_i = a_i, 1 \leqslant i \leqslant n+1. \tag{5.2.27}
$$

由(5.2.25)可知, R^n 中的任意两个单纯形都是仿射等价的. 当有限元剖分是用单纯形时,称 $\hat{K}$ 是标准单元.

现在考虑平行多面体做为有限元剖分的单元. 此时标准单元 $\hat{K}$ 通常取为下述两个集合之一,

$$
\{\hat{x} \mid |\hat{x}_i| \leqslant 1, \ 1 \leqslant i \leqslant n\}, \tag{5.2.28}
$$

$$
\{\hat{x} \mid 0 \leqslant \hat{x}_i \leqslant 1, \ 1 \leqslant i \leqslant n\}. \tag{5.2.29}
$$

对给定的线性无关的点 $a_1, \cdots, a_n \in R^n$ 及点 $x^0 \in R^n$ 和所定义的平行多面体 $K = \Big\{ x \mid x = x^0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, 0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1, j = 1, \cdots,$

$n\}$，定义仿射变换 $F_K: \hat{K} \to K$ 如下：

$$F_K\hat{x} = B_K\hat{x} + b_K, \ \hat{x} \in \hat{K},$$

其中，若记 $a_j = (a_{ij})$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则在 $\hat{K}$ 取 (5.2.28) 的定义时，

$$B_K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$b_K = x^0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{5.2.30}$$

当 $\hat{K}$ 取(5.2.29)的定义时

$$B_K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \ b_K = x_0. \tag{5.2.31}$$

由上述讨论可知，任意两个平行多面体都是仿射等价的。

对任意单纯形或平行多面体 K，取标准单元 $\hat{K}$ 为由(5.2.23)定义的点所定义的单纯形或为由 (5.2.28)或 (5.2.29) 所定义的矩形。于是由 (5.2.26)或(5.2.30)或(5.2.31)确定了一个仿射变换：$F_K\hat{x} = B_K\hat{x} + b_K, \hat{x} \in \hat{K}$，使得 $F_K\hat{K} = K$。今后，给定了单纯形或平行多面体 K，F_K, B_K, b_K 也就相应地按上述方法确定了。对于定义在K或 ∂K 上的函数 w，定义 $\hat{K}$ 或 $\partial\hat{K}$ 上的函数$\hat{w}$ 如下：

$$\hat{w} = w \cdot F_K, \tag{5.2.32}$$

令 r 是非负整数，对于定义在 $C^r(K)$ 上的线性泛函 φ，令在 $C^r(\hat{K})$ 上的线性泛函 $\hat{\varphi}$ 如下定义：

$$\hat{\varphi}(\hat{w}) = \varphi(w), \ \forall \hat{w} \in C^r(\hat{K}), \tag{5.2.33}$$

其中 $\hat{w}$ 和w按(5.2.32)式对应。今后，$\hat{w}$ 和w及φ和$\hat{\varphi}$ 都分别按(5.2.32)式及(5.2.33)式对应。

§5.3 有限元空间 W_h^1 和 $\mathring{W}_h^1$

为了描述有限元空间,需要一个能包含有限元空间及 Sobolev 空间的适当空间. 设 Ω 是 R^n 中的多胞形域. 对 $W^{1,\sigma}(\Omega)$ 中的元素 w 及其导数 $\partial_i w$, 其逼近形式 $\Pi^0 w$ 和 $\Pi^{e_i} w$ 可以不具有导数关系,但 $w, \partial_i w \in L^\sigma(\Omega)$,所以 $\Pi^0 w, \Pi^{e_i} w$ 也应属于 $L^\sigma(\Omega)$.因此可猜测期望的空间应是乘积空间 $(L^\sigma(\Omega))^{n+1}$.

对于整数 $m \geqslant 0$ 和实数 $\sigma \in [1,\infty]$, 记M是满足 $|\beta| \leqslant m$ 的所有 n 重指标 β 的个数, 记 $L^{m,\sigma}(\Omega) = (L^\sigma(\Omega))^M$. 为了便于与 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的元素及其导数对应,记 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的 u 的分量为 u^β, $|\beta| \leqslant m$. 于是

$$L^{m,\sigma}(\Omega) = \{u \mid u = (u^\beta)_{|\beta| \leqslant m}, u^\beta \in L^\sigma(\Omega), |\beta| \leqslant m\}.$$

例如, $L^{1,\sigma}(\Omega)$ 是由形为 $(u^0, u^{e_1}, \cdots, u^{e_n})$ 且 $u^0, u^{e_1}, \cdots, u^{e_n} \in L^\sigma(\Omega)$ 的所有元素构成的空间. $n = 2$ 时, $L^{2,\sigma}(\Omega)$ 中的元素具有 $(u^0, u^{e_1}, u^{e_2}, u^{(2,0)}, u^{(1,1)}, u^{(0,2)})$ 的形式.

对于 $u \in L^{m,\sigma}(\Omega)$, 当 $\sigma < \infty$ 时,定义范数 $\|\cdot\|_{m,\sigma,\Omega}$ 和半范 $|\cdot|_{m,\sigma,\Omega}$ 如下:

$$\|u\|_{m,\sigma,\Omega} = \left(\sum_{|\beta| \leqslant m} \int_\Omega |u^\beta|^\sigma dx\right)^{1/\sigma}, \tag{5.3.1}$$

$$|u|_{m,\sigma,\Omega} = \left(\sum_{|\beta| = m} \int_\Omega |u^\beta|^\sigma dx\right)^{1/\sigma}. \tag{5.3.2}$$

当 $\sigma = \infty$时,定义范数和半范如下:

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\beta| \leqslant m} \operatorname*{esssup}_{x \in \Omega} |u^\beta(x)|, \tag{5.3.3}$$

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\beta| = m} \operatorname*{esssup}_{x \in \Omega} |u^\beta(x)|. \tag{5.3.4}$$

对于 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的元素 w, 自然地w与 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的元素 u^β, $u^\beta = D^\beta w$ 对应. 按照这种对应, $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 的子空间映成 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的子空间. 由于这一对应是保范和半范的,故仍以 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 等习惯记号记在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中对应的空间. 对于 $u \in$

$L^{m,\sigma}(\Omega)$，按照把 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 对应于 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的子空间的方法，u^β 相当于 u^0 的导数 $D^\beta u^0$ 的位置，但 u^β 并不一定是 u^0 的导数。

令$\{K_h\}_{h\in(0,1)}$是Ω的一族有限元剖分.目的是要给出$W^{m,\sigma}(\Omega)$的有限元逼近空间 W_h^m. 给出 W_h^m 的元素形式首先要给出它在单元上的形式。为了叙述方便，对应于 $\{K_h\}$ 选择一类单元构成的集合 $\mathscr{K}$，$\mathscr{K}$ 包含 $\{K_h\}$ 中所有单元。

对于 $K\in\mathscr{K}$，记 $P(K)$ 是K上全体多项式构成的空间，$P_r(K)$ 是次数不高于 r 的多项式全体构成的有限维空间，$Q_r(K)$ 是 $\{x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}\mid\beta_i=0,1,\cdots,r,i=1,\cdots,n\}$ 张成的空间。

现在给出用于近似 $W^{1,\sigma}(\Omega)$ 和 $\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$ 的有限元空间的构造方法。对 $\forall K\in\mathscr{K}$，给定两个线性多项式插值算子，Π_K^0: $C^1(K)\to P(K)$，$\Pi_{\partial K}: C^1(K)\to L^\infty(\partial K)$，以及 n 个 $P(K)$ 的有限维子空间 $N_K^{e_i}$，$1\leqslant i\leqslant n$. 定义线性算子 $\Pi_K^{e_i}$: $C^1(K)\to N_K^{e_i}(i=1,\cdots,n)$ 如下：$v\in C^1(K)$ 时 $\Pi_K^{e_i}v$ 满足

$$\int_K p\Pi_K^{e_i}v\,dx=\int_{\partial K}p\Pi_{\partial K}vN_i\,ds-\int_K D^{e_i}p\Pi_K^0v\,dx,\quad\forall p\in N_K^{e_i},\tag{5.3.5}$$

其中 $N=(N_1,N_2,\cdots,N_n)^T$ 是 ∂K 的单位外法向量。

对于 $h\in(0,1)$，定义 $\Pi_h^1: C^1(\bar\Omega)\to L^{1,\infty}(\Omega)$ 如下：

$$u\in C^1(\bar\Omega),(\Pi_h^1u)^\beta|_K=\Pi_K^\beta(u|_K),\forall K\in K_h,|\beta|\leqslant 1.\tag{5.3.6}$$

用于逼近 $W^{1,\sigma}(\Omega),\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$ 的有限元空间可按下法得到

$$\begin{cases}W_h^1=\{w\mid w=\Pi_h^1u,u\in C^1(\bar\Omega)\},\\ \mathring{W}_h^1=\{w\mid w=\Pi_h^1u,u\in C^1(\bar\Omega)\ \text{且}\ D^\beta u|_{\partial\Omega}=0,|\beta|\leqslant 1\}.\end{cases}\tag{5.3.7}$$

通常情形下，对于 $v\in C^1(K)$，$D^{e_i}\Pi_K^0v=\Pi_K^{e_i}v$，$1\leqslant i\leqslant n$，在$K$上并不成立，它们成立的一个充分条件是

$$D^{e_i}\Pi_K^0v\in N_K^{e_i},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \Pi_K^0v|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}v.\tag{5.3.8}$$

如果所构造的有限元空间 W_h^1 的元素 w 在每个单元 K 上都有 $w^{e_i}=D^{e_i}w^0$，则称 W_h^1 是非协调元空间．如果 $W_h^1\subset W^{1,\sigma}(\Omega)$ 则称该空间是协调元空间．如果想构造一个非协调元空间，那么只须给出 Π_K^0 就可以了，因为其它步骤只须令 $\Pi_{\partial K}\cdot=\Pi_K^0\cdot|_{\partial K}$，$N_K^{e_i}$ 包含足够高阶的 $P_r(K)$．

引理 5.3.1 如果 $\forall v\in C^1(K)$，$\forall K\in K_h$，(5.3.8) 成立，则 $D^{e_i}\Pi_K^1 v=\Pi_K^{e_i}v$，$i=1,\cdots,n$，$K\in K_h$．如果进一步 $\forall K_1,K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是 $n-1$ 维公共表面时，$\forall v\in C^1(K_1\cup K_2)$ 有 $\Pi_{\partial K_1}v|_F=\Pi_{\partial K_2}v|_F$，则 $W_h^1\subset W^{1,\sigma}(\Omega)$．

证明 只需证明 $W_h^1\subset W^{1,\sigma}(\Omega)$．令 $w\in W_h^1$，要证明 $w\in W^{1,\sigma}(\Omega)$，就是要证明

$$\int_\Omega \varphi w^{e_i}dx=-\int_\Omega D^{e_i}\varphi w^0 dx,1\leqslant i\leqslant n,\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega).\tag{5.3.9}$$

由(5.3.7)可知，存在 $u\in C^1(\bar{\Omega})$ 使得 $w=\Pi_h^1 u$．利用 Green 公式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi w^{e_i}dx&=\sum_{K\in K_h}\int_K \varphi\Pi_K^{e_i}u dx=\sum_{K\in K_h}\int_K \varphi D^{e_i}\Pi_K^0 u dx\\&=\sum_{K\in K_h}\left\{\int_{\partial K}\varphi\Pi_K^0 uN_i ds-\int_K D^{e_i}\varphi\Pi_K^0 u dx\right\}\\&=-\int_\Omega D^{e_i}\varphi W^0 dx+\sum_{K\in K_h}\int_{\partial K}\varphi\Pi_K^0 uN_i ds.\end{aligned}$$

如果 $\sum_K\int_{\partial K}\varphi\Pi_K^0 uN_i ds=0$，则(5.3.9)式成立．在 ∂K 属于 $\partial\Omega$ 的部分上 $\varphi=0$，而当 K 的 $n-1$ 维表面 $F\not\subset\partial\Omega$ 时，由引理 5.1.1，存在另一个单元 $K'\in K_h$，使得 $F=\partial K\cap\partial K'$．由假设，$\Pi_K^0 u|_F=\Pi_{\partial K}u|_F=\Pi\partial_{K'}u|_F=\Pi_{K'}^0 u|_F$，$\varphi$ 在 F 上连续．另外 ∂K 在 F 上的 N_i 与 $\partial K'$ 在 F 上的 N_i' 大小相等符号相反，所以 $\int_F\varphi\Pi_K^0 uN_i ds=-\int_F\varphi\Pi_{K'}^0 uN_i ds$．因此得 $\sum_K\int_{\partial K}\varphi\Pi_K^0 uN_i ds=$

0. 即 $w\in \mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$. 证毕.

在 $w\in \mathring{W}_h^1$ 时,在引理 5.3.1 的条件下,要证明$w\in \mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$,只须证明 $w^0|_{\partial\Omega}=0$. 当 F 是 $K\in K_h$ 的 $n-1$ 维表面且 $F\subset \partial\Omega$ 时,如果存在 $K'\in\mathscr{K}$ 且 $F=K\cap K'$, $K'\subset R^n-\Omega$, 则由引理 5.3.1 的条件可得 $w^0|_F=0$.如果对所有这样的 F 都能在$\mathscr{K}$中找出相应的 K',那么可证得 $\mathring{W}_h^1\subset\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$.

现在讨论插值算子 Π_K^0, $\Pi_{\partial K}$ 等具体表达方式. 设 s_1 是整数且 $0\leqslant s_1\leqslant 1$. 设存在定义在 $C^{s_1}(K)$ 上的由 M_1 个线性独立的线性连续泛函构成的向量

$$\phi_K^1(\cdot)=(\phi_{1,K}(\cdot),\cdots,\phi_{M_1,K}(\cdot))^T$$

以及 $G_{i,K}\in P(K)$, $g_{i,K}\in L^\infty(\partial K)$, $1\leqslant i\leqslant M_1$, 使得当 $v\in C^1(K)$ 时有

$$\Pi_K^0 v=\sum_{i=1}^{M_1}\phi_{i,K}(v)G_{i,K},\quad \Pi_{\partial K}v=\sum_{i=1}^{M_1}\phi_{i,K}(v)g_{i,K},\tag{5.3.10}$$

且当 $\Pi_K^0 v=0$, $\Pi_{\partial K}v=0$ 时, $\phi_K^1(v)=0$. 称 $\phi_{i,K}$ 是插值参数或节点参数.

记 L_β 是 N_K^β 的维数,选择 N_K^β 的一组基

$$\{p_{l,K}^\beta|1\leqslant l\leqslant L_\beta\},$$

记 $\Pi_K^\beta v$ 在这组基下的坐标向量是 $\zeta_{\beta,K}(v)$. 令

$$\zeta_K^1(v)=(\zeta_{e_1,K}(v)^T,\cdots,\zeta_{e_n,K}(v)^T)^T,$$

则通过(5.3.5)可以得到

$$A_K^1\zeta_K^1(v)=Q_K^1\phi_K^1(v),\tag{5.3.11}$$

其中 A_K^1 是 $\left(\sum_{i=1}^n L_{e_i}\right)$ 阶对称正定阵, Q_K^1 是 $\left(\sum_{i=1}^n L_{e_i}\right)\times M_1$ 阶矩阵. A_K^1 的形式是

$$A_K^1=\begin{pmatrix}A_K^{(1)} & & 0\\ & A_K^{(2)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_K^{(n)}\end{pmatrix}.$$

$A_K^{e_i}$ 是 L_{e_i} 阶对称正定阵，它的第 jk 元素是 $\int_K p_{j,K}^{e_i} p_{k,K}^{e_i} dx$. Q_K^1 的形式是

$$Q_K^1 = \begin{pmatrix} Q_K^{e_1} \\ Q_K^{e_2} \\ \vdots \\ Q_K^{e_p} \end{pmatrix},$$

$Q_K^{e_i}$ 是 $L_{e_i} \times M_1$ 阶阵，它的第 jk 元素是 $\int_{\partial K} p_{j,K}^{e_i} g_{k,K} N_i ds - \int_K D^{e_i} p_{j,K}^{e_i} G_{k,K} dx$.

本书总假定 M_1, L_β 是K无关的整数.

$\phi_K^1(v)$ 的分量 $\phi_{i,K}(v)$ 一般是 v 在某点的函数值，导数值或某种积分平均值，在点值的情况下称这些点是单元节点. 当微分方程的问题化成有限元方程时，求解的就是这些泛函值 $\phi_{i,K}(v)$ 而不关心 v 究竟是什么.

由上述讨论可知，构造有限元空间，只要完成下述三条，就可以按着固定的方法和Ω的剖分情况得所需的空间了.

(1) 给定单元的几何形状，确定集合 $\mathscr{K}$;

(2) 确定节点参数;

(3) 构造 $\Pi_K^0, \Pi_{\partial K}$ 及 N_K^β.

下面举一些例子，一方面说明怎样构造有限元空间，另一方面这些单元也是实际常用的.

1. Lagrange 型单纯形单元

这一类单元的形状是单纯形，即 $\mathscr{K}$ 由所有单纯形组成，而且用到的节点参数都是函数值. 只用函数值作节点参数的插值算子通常称为 Lagrange 型. 另外这一类单元都是用一套函数逼近方法构造的，即只给出 Π_K^0 的构造则可.

SLC1 元. 单元形状是单纯形; $n+1$ 个节点参数是单纯形的顶点 $a_i (1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 处的函数值 (参见 5.3.1 图). 即对

$v \in \hat{C}^1(K), \phi_{i,K}(v) = v(a_i), 1 \leqslant i \leqslant n+1$。$\Pi_K^0 v$ 用重心坐标可表示如下：

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i. \tag{5.3.12}$$

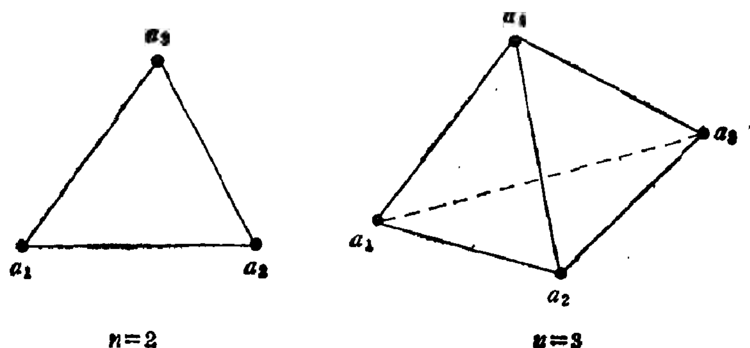


图 5.3.1

在图 5.3.1 中，一个圆点表示节点参数是该点的函数值。另外用○表示某点的 n 个一阶导数值，◎表示所有的二阶导数值。由重心坐标的定义可知，$\Pi_K^0 v \in P_1(K)$。由于 a_i 点的重心坐标是 $\lambda_i = 1, \lambda_j = 0, j \neq i$，所以 $(\Pi_K^0 v)(a_i) = v(a_i)$。

SLC2. 单元形状是单纯形；记单纯形 K 的顶点是 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$，$K$ 的每条边中点记为 a_{ij}，$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$，$1 \leqslant i < j \leqslant n+1$。节点参数是 a_i, a_{ij} 点的函数值：$v_i = v(a_i), v_{ij} = v(a_{ij})$，$v \in C^1(K)$，一共 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个（参加图 5.3.2）。$\Pi_K^0 v \in P_2(K)$，具体形式是

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (2\lambda_i - 1) v_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} 4\lambda_i \lambda_j v_{ij}, \tag{5.3.13}$$

不难验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v_i, \Pi_K^0 v(a_{ij}) = v_{ij}$。

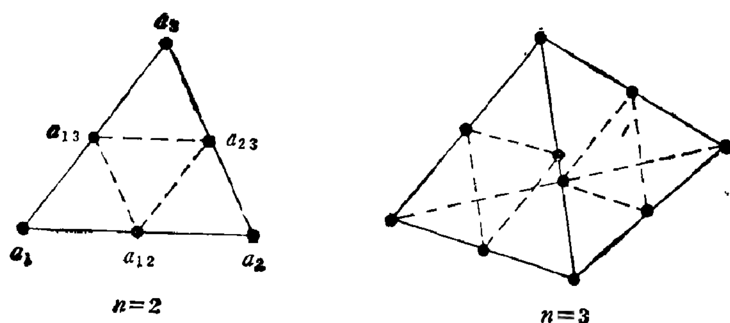


图 5.3.2

SLC3 元. 单元形状是单纯形，记单纯形 K 的顶点为 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$， $a_{iij}=\frac{1}{3}(2a_i+a_j), i \neq j$， $a_{ijk}=\frac{1}{3}(a_i+a_j+a_k)$， $i<j<k$. 则节点参数是 a_i， a_{iij}， a_{ijk} 点的函数值（见图 5.3.3）。$\forall v \in C^1(K), \Pi_K^0 v$ 表达式如下：

$$
\begin{aligned}
\Pi_K^0 v = & \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)v(a_i) \\
& + \sum_{i \neq j} \frac{9}{2} \lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)v(a_{iij}) \\
& + \sum_{i<j<k} 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k v(a_{ijk}),
\end{aligned} \tag{5.3.14}
$$

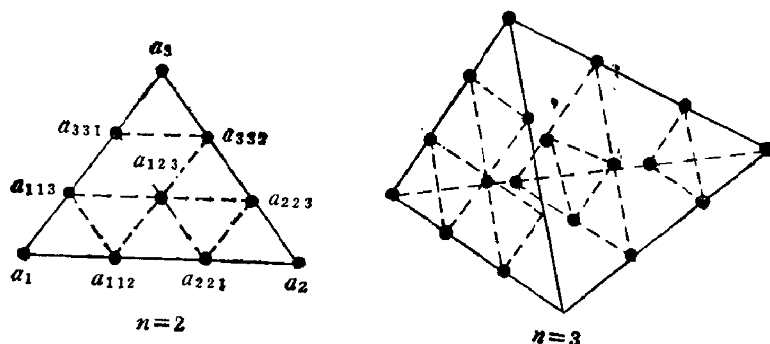


图 5.3.3

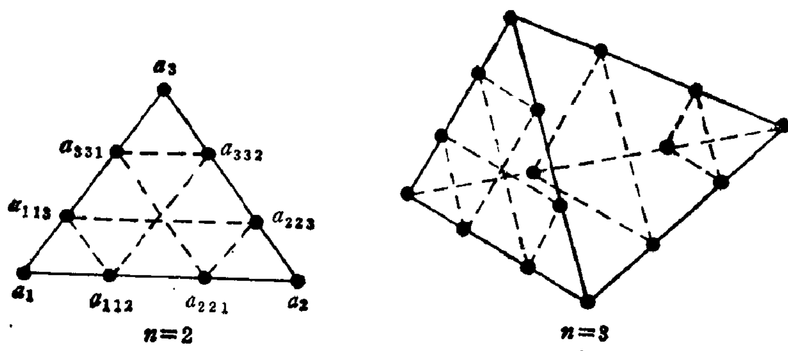


图 5.3.4

可以验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i)$，$\Pi_K^0 v(a_{iij}) = v(a_{iij})$，$\Pi_K^0 v(a_{ijk}) = v(a_{ijk})$.

SLC3′ 元. 单元形状是单纯形，单纯形 K 的顶点是 $a_i(1 \leqslant i \leqslant n+1)$，记 $a_{iij} = \frac{1}{3}(2a_i + a_j), i \neq j$. $(n+1)^2$ 个节点参数是 a_i, a_{iij} 点处的函数值(见图 5.3.4). 对于 $v \in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$ 的表达式如下：

$$\begin{aligned}\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{n+1}\Big(&\frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)\\ &\times(3\lambda_i - 2)\\ &- \frac{9}{2}\sum_{\substack{j<k\\ j,k\neq i}}\lambda_j\lambda_k\Big)v(a_i)\\ &+ \sum_{i\neq j}\Big(\frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1)\\ &+ \frac{27}{4}\lambda_i\lambda_j\\ &\times\sum_{k\neq i,j}\lambda_k\Big)v(a_{iij}),\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

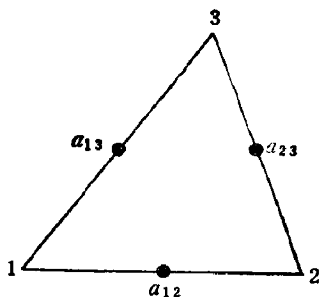


图 5.3.5

可以验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i)$，$\Pi_K^0 v(a_{iij}) = v(a_{iij})$.

SLN1 元. 这是一个三角形单元. 参数是三角形 K 每边中点

的函数值(见图 5.3.5). 对 $v\in C^1(K)$, $\Pi_K^0 v$ 的具体表达式是

$$\Pi_K^0 v=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant 3\\ k\neq i,j}}(\lambda_i+\lambda_j-\lambda_k)v(a_{ij}). \tag{5.3.16}$$

不难验证, $\Pi_K^0 v(a_{ij})=v(a_{ij})$.

2. Lagrange 型矩形单元

这一类单元的形状都是矩形, 且矩形的各边分别平行于某个坐标轴, 用到的节点参数都是函数值. 这类单元都是用一套函数逼近方法构造的, 所以只须给出 Π_K^0 的构造.

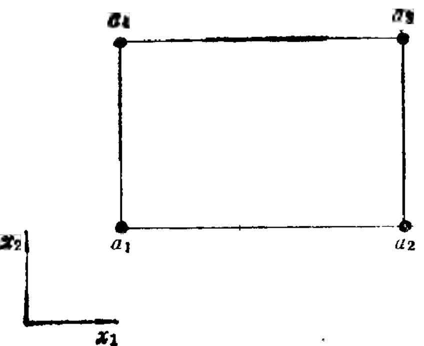
RLCk 元 ($k\geqslant 1$). 单元形状见图 5.3.6 和 5.3.7. 为了描述节点参数和插值算子, 引入坐标变换. 对于矩形 K, 存在一个点 x^0 和 n 个大于 0 的数 $h_1,\cdots,h_n$, 使得 $K=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i=x_i^0+h_i\xi_i, 0\leqslant\xi_i\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant n\}$. 记 $S_k=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i=x_i^0+h_i\dfrac{l_i}{k}, l_i=0,1,\cdots,k, 1\leqslant i\leqslant n\}$. $(k+1)^n$ 个节点参数是 S_k 中每点的值. 对于 $v\in C^1(K)$, $\Pi_K^0 v$ 的表达式如下

$$\Pi_K^0 v=\sum_{0\leqslant l_1,\cdots,l_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{\substack{i_j=0\\ i_j\neq l_j}}^{k}\frac{k\xi_j-i_j}{l_j-i_j}\right)\times v\left(x_1^0+\frac{l_1h_1}{k},\cdots,x_n^0+\frac{l_nh_n}{k}\right). \tag{5.3.17}$$

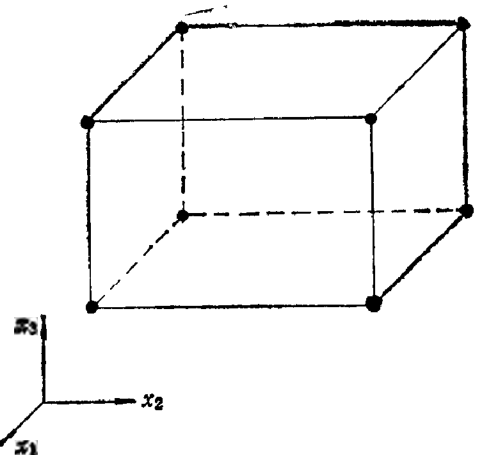
显然 $\Pi_K^0 v\left(x_1^0+\dfrac{l_1h_1}{k},\cdots,x_n^0+\dfrac{l_nh_n}{k}\right)=v\left(x_1^0+\dfrac{l_1h_1}{k},\cdots,x_n^0+\dfrac{l_nh_n}{k}\right)$.

RLC2′ 元. $n=2$, 单元形状是矩形, 8 个节点参数是 K 的顶点和各边中点的函数值(见图 5.3.8). K 可以如下表示, $K=\{(x_1,x_2)\mid x_i^0+h_i\xi_i, 0\leqslant\xi_i\leqslant 1, i=1,2\}$. 记 $\xi_3=1-\xi_1$, $\xi_4=1-\xi_2$, $\xi_{i+4}=\xi_i$, $i=1,2,\cdots$. 令

$$\begin{cases}p_i=\xi_{i+2}\xi_{i+3}(2\xi_{i+2}+2\xi_{i+3}-3), 1\leqslant i\leqslant 4,\\ p_{i+4}=-4\xi_{i+2}\xi_{i+3}(\xi_{i+1}-1), 1\leqslant i\leqslant 4,\end{cases} \tag{5.3.18}$$

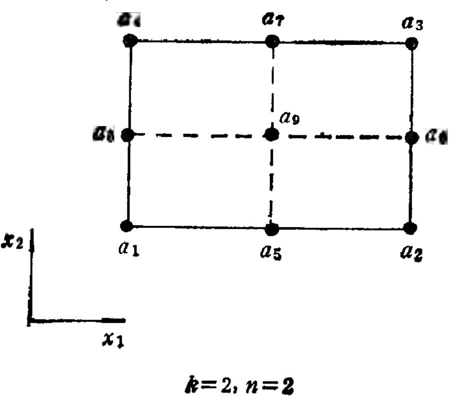


$k=1, n=2$

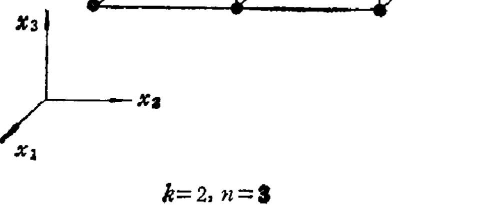


$k=1, n=3$

图 5.3.6



$k=2, n=2$



$k=2, n=3$

图 5.3.7

则 $\forall v \in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$ 表示如下

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{8} p_i v(a_i). \tag{5.3.19}$$

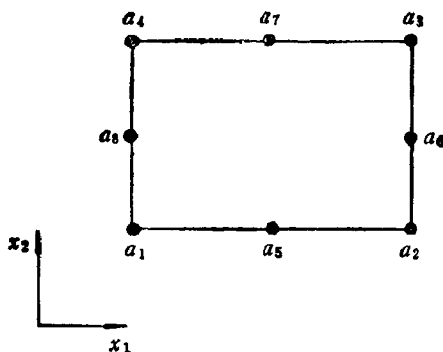


图 5.3.8

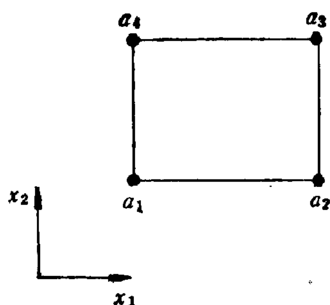


图 5.3.9

Wilson 元．单元形状如图 5.3.9，6 个节点参数是K的四个顶点处的函数值及 $C^0(K)$ 上的泛函 $\phi_1(\cdot)$，$\phi_2(\cdot)$，$\phi_i(p) = 0$，$\forall p \in Q_1(K)$，$i = 1,2$．单元K按 RLC2′ 元描述，则 $\forall v \in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$ 表达式如下：

$$\Pi_K^0 v = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1 + \xi_1^i \xi_1)(1 + \xi_2^i \xi_2) v(a_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \phi_i(v)(1 - \xi_i^2), \tag{5.3.20}$$

其中 $a_i = (x_1^0 + \xi_1^i h_1,\ x_2^0 + \xi_2^i h_2)$．不难验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i)$．

上面例子使用的节点参数都是函数值．下面给出两个使用导数值的例子，它们称为 Hermite 型单元．因为这两个单元都是用一套函数构造的，所以只给出 Π_K^0．

SHC3 元．单元的形状是单纯形，记 $a_i (1 \leqslant i \leqslant n+1)$是$K$的顶点，$a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k)$，$1 \leqslant i < j < k \leqslant n+1$．参数点 a_i 点的函数值和 n 个一阶导数值及 a_{ijk} 点的函数值（见图

5.3.10)，一共 $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ 个参数。$\forall v \in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$ 用重心坐标可以表示如下

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{n+1}\left(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_i \sum_{\substack{j<k \\ j\neq i,\, k\neq i}} \lambda_j\lambda_k\right) v(a_i)$$
$$+ 27 \sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k v(a_{ijk})$$
$$+ \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j(2\lambda_i + \lambda_j - 1) Dv(a_i)(a_j - a_i), \tag{5.3.21}$$

其中 $Dv = (D^{e_1}v, \cdots, D^{e_n}v)$，$Dv(a_i)(a_j - a_i)$ 是 $Dv(a_i)^T$ 与 $a_j - a_i$ 的内积. 可以验证：$\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i)$，$D\Pi_K^0 v(a_i) = Dv(a_i)$，$\Pi_K^0 v(a_{ijk}) = v(a_{ijk})$。

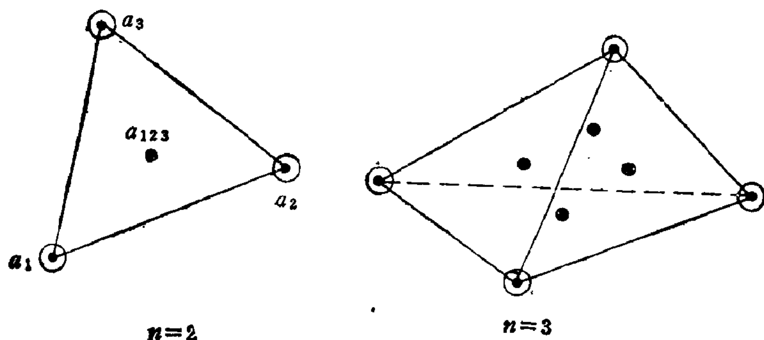


图 5.3.10

Zienkiewicz 元。单元形状是三角形($n=2$)。记 a_1, a_2, a_3 是 K 的顶点。9 个节点参数是 a_i 点的函数值和两个一阶导数值，见图 5.3.11。$\forall v \in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$ 用重心坐标表示如下

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2(3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3) v(a_i)$$
$$+ \sum_{\substack{1\le i,j\le 3 \\ i\neq j}} \frac{1}{2} \lambda_i\lambda_j(1 + \lambda_i - \lambda_j) Dv(a_i)(a_j - a_i). \tag{5.3.22}$$

可以验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i)$，$D\Pi_K^0 v(a_i) = Dv(a_i)$。

在结束本节之前，给出用多套函数逼近方法构造的单元.

RQC4 元（4 参拟协调元）. $n=2$，单元形状是各边分别平行于坐标轴的矩形，4 个节点参数是各边中点 a_i 处的函数值（见图 5.3.12）. 记 x^0 是 K 的形心，则 $K=\{(x_1,x_2)\mid x_i=x_i^0+\xi_i h_i,\ |\xi_i|\leqslant 1, i=1,2\}$. 记 a_i 点的坐标为 $(x_1^0+\xi_1^i h_1,\ x_2^0+\xi_2^i h_2)$，$a_i$ 点所在的边为 F_i. $\forall v\in C^1(K)$，$\Pi_K^0 v$，$\Pi_{\partial K} v$ 如下定义：

$$\Pi_K^0 v=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left[1+2\xi_1^i\xi_1+2\xi_2^i\xi_2+(\xi_1^i\xi_1^i-\xi_2^i\xi_2^i)(\xi_1\xi_1-\xi_2\xi_2)\right]v(a_i), \tag{5.3.23}$$

$$\Pi_{\partial K} v|_{F_i}=v(a_i)+\frac{1}{2}\xi_{i+1}^{i+1}\xi_{i+1}(v(a_{i+1})-v(a_{i-1})),\quad i=1,2,3,4, \tag{5.3.24}$$

其中 $a_5=a_1, a_0=a_4, \xi_{i+2}=\xi_i, \xi_i^5=\xi_i^1$. $N_K^\beta=\{1,\xi_1,\xi_2\}$ 张成的空间. 若记 $\phi_K^1(v)=(v(a_1),\cdots,v(a_4))^T$，$N_K^\beta$ 的基底取为 $\{1,\xi_1,\xi_2\}$，则(5.3.11)中的 A_K^1 和 Q_K^1 为

$$A_K^1=\begin{pmatrix}4 & & & & & & \\ & \frac{4}{3} & & & 0 & & \\ & & \frac{4}{3} & & & & \\ & & & 4 & & & \\ & & & & \frac{4}{3} & & \\ & 0 & & & & \frac{4}{3} & \end{pmatrix}h_1h_2, \tag{5.3.25}$$

$$Q_K^1=\begin{pmatrix}2h_2 & 0 & -2h_2 & 0\\ h_2 & -h_2 & h_2 & -h_2\\ 0&0&0&0\\ 0 & 2h_1 & 0 & -2h_1\\ 0&0&0&0\\ -h_1 & h_1 & -h_1 & h_1\end{pmatrix}. \tag{5.3.26}$$

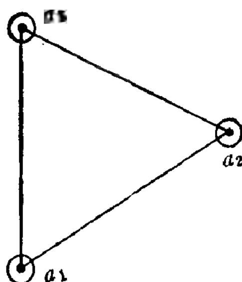


图 5.3.11

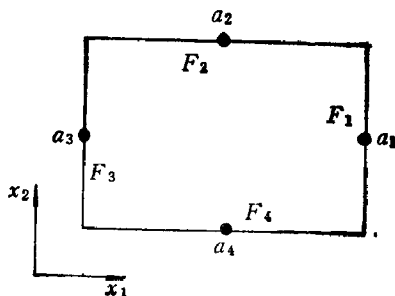


图 5.3.12

上面介绍的单元中，Zienkiewicz 元和 Wilson 元分别是由 Zienkiewicz 和 Wilson 提出的，RQC4 元是由王鸣给出的。

§5.4 有限元空间 W_h^2 和 $\mathring{W}_h^2$

本节令 $n=2$，即 Ω 是平面区域。考虑用于逼近 $W^{2,\sigma}(\Omega)$ 和 $\mathring{W}^{2,\sigma}(\Omega)$ 的有限元空间的构造.设 Ω 是多边形域，$\{K_h\}_{h\in(0,1)}$ 是 Ω 的一族有限元剖分。$\mathscr{K}$ 是一类单元构成的集合，K_h 中的所有单元都属于 $\mathscr{K}$。

$\forall K\in\mathscr{K}$，给定四个线性多项式插值算子，$\Pi_K^0: C^2(K)\to P(K), \Pi_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^s, \Pi_{\partial K}^N: C^2(K)\to L^\infty(\partial K)$，以及五个 $P(K)$ 的有限维子空间 $N_K^\beta, 0<|\beta|\leqslant 2$。

对于 $0<|\beta|\leqslant 2$，定义 $\Pi_K^\beta: C^2(K)\to N_K^\beta$ 如下：对于 $v\in C^2(K)$，$\Pi_K^\beta v$ 由下述各式确定：

$$\begin{cases} i=1,2, \int_K p\Pi_K^{e_i}v\,dx=\int_{\partial K}p\Pi_{\partial K}vN_i\,ds-\int_K D^{e_i}p\Pi_K^0 v\,dx, \\ \qquad \forall p\in N_K^{e_i}, \\ \int_K p\Pi_K^{(2,0)}v\,dx=\int_{\partial K}p(N_1^2\Pi_{\partial K}^N v-N_1N_2\Pi_{\partial K}^s v)ds \\ \qquad -\int_K D^{e_1}p\Pi_K^{e_1}v\,dx, \forall p\in N_K^{(2,0)}, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
2\int_K p\Pi_K^{(1,1)}v\,dx = \int_{\partial K} p(2N_1N_2\Pi_{\partial K}^N v + (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^s v)ds \\
\qquad - \int_K (D^{e_1}p\Pi_K^{e_2}v + D^{e_2}p\Pi_K^{e_1}v)dx, \forall p \in N_K^{(1,1)}, \\
\int_K p\Pi_K^{(0,2)}v\,dx = \int_{\partial K} p(N_2^2\Pi_{\partial K}^N v + N_1N_2\Pi_{\partial K}^s v)ds \\
\qquad - \int_K D^{e_2}p\Pi_K^{e_2}v\,dx, \quad \forall p \in N_K^{(0,2)}.
\end{cases}
\tag{5.4.1}
$$

定义 $\Pi_h^2: C^2(\bar{\Omega}) \to L^{2,\infty}(\Omega)$ 如下:

$$
\forall u \in C^2(\bar{\Omega}), (\Pi_h^2 u)^\beta|_K = \Pi_K^\beta(u|_K), |\beta| \leqslant 2, K \in K_h.
\tag{5.4.2}
$$

用于逼近 $W^{2,\sigma}(\Omega)$ 及 $\mathring{W}^{2,\sigma}(\Omega)$ 的有限元空间按下法可得

$$
\begin{cases}
W_h^2 = \{w \mid w = \Pi_h^2 u, \forall u \in C^2(\bar{\Omega})\}, \\
\mathring{W}_h^2 = \{w \mid w = \Pi_h^2 u, \forall u \in C^2(\bar{\Omega}) \text{且} D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0, |\beta| \leqslant 2\}.
\end{cases}
\tag{5.4.3}
$$

一般的说,对于 $v \in C^2(K)$, $D^{e_i}\Pi_K^\beta v = \Pi_K^{\beta+e_i}v(|\beta| \leqslant 1,\ i = 1,2)$ 在K上并不一定成立. 它们成立的一个充分条件是

$$
\begin{cases}
D^\beta\Pi_K^0 v \in N_K^\beta, 0 < |\beta| \leqslant 2, \\
\Pi_{\partial K}v - \Pi_K^0 v|_{\partial K} = \Pi_{\partial K}^s v - \dfrac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K} \\
\qquad = \Pi_{\partial K}^N v - \dfrac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0 v|_{\partial K} = 0.
\end{cases}
\tag{5.4.4}
$$

如果 $\forall v \in C^2(K)$ (5.4.4) 都成立,则 W_h^2 就是非协调元空间,进一步如果 $W_h^2 \subset W^{2,\sigma}(\Omega)$, 则 W_h^2 是协调元空间. 类似于 W_h^1 的讨论,下述引理成立. 引理的证明留给读者做为练习.

引理 5.4.1 如果 $\forall v \in C^2(K)$, $\forall K \in K_h$, (5.4.4) 成立, 则 $D^{e_i}\Pi_K^\beta v = \Pi_K^{\beta+e_i}v$, $|\beta| \leqslant 1$, $i = 1,2$. 进一步当 $\forall K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, $F = K_1 \cap K_2$ 是公共边, $\forall v \in C^2(K_1 \cup K_2)$, 有 $\Pi_{\partial K_1}v - \Pi_{\partial K_2}v|_F = \Pi_{\partial K_1}^N v + \Pi_{\partial K_2}^N v|_F = 0$ 时,则 $W_h^2 \subset W^{2,\sigma}(\Omega)$.

现在讨论插值算子 Π_K^0, $\Pi_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^s, \Pi_{\partial K}^N$ 及 Π_K^β 等的具体表示方式. 设存在定义在 $C^{s_2}(K)(s_2 \in \{0, 1, 2\})$ 上的由M_2个线性独

立的线性泛函构成的向量 $\phi_K^2(\cdot)=(\phi_{1,K}(\cdot),\cdots,\phi_{M_2,K}(\cdot))^T$，又设 $G_{i,K}\in P(K)$，$g_{i,K}$，$g_{i,K}^t$，$g_{i,K}^N\in L^\infty(\partial K)$，$1\leqslant i\leqslant M_2$，则 $v\in C^2(K)$，

$$\begin{cases} \Pi_K^0 v=\sum_{i=1}^{M_2}\phi_{i,K}(v)G_{i,K},\Pi_{\partial K}v=\sum_{i=1}^{M_2}\phi_{i,K}(v)g_{i,K}, \\ \Pi_{\partial K}^t v=\sum_{i=1}^{M_2}\phi_{i,K}(v)g_{i,K}^t,\Pi_{\partial K}^N v=\sum_{i=1}^{M_2}\phi_{i,K}(v)g_{i,K}^N. \end{cases} \tag{5.4.5}$$

且当 $\Pi_K^0 v=0$，$\Pi_{\partial K}v=\Pi_{\partial K}^t v=\Pi_{\partial K}^N v=0$ 时，$\phi_K^2(v)=0$。称 $\phi_{i,K}$ 是 Π_K^0 等的插值参数或节点参数。

记 L_β 是 $N_K^\beta(0<|\beta|\leqslant 2)$ 的维数，选一组基 $\{p_{l,K}^\beta,1\leqslant l\leqslant L_\beta\}\subset N_K^\beta$，记 $\Pi_K^\beta v$ 在这组基下的坐标为 $\zeta_{\beta,K}(v)$，记 $\zeta_K^2=(\zeta_{(2,0),K}(v)^T,\zeta_{(1,1),K}(v)^T,\zeta_{(0,2),K}(v)^T)^T$。则通过(5.4.1)式可以得下述关系式

$$A_K^2\zeta_K^2(v)=Q_K^2\phi_K^2(v), \tag{5.4.6}$$

其中 A_K^2 是 $\left(\sum_{|\beta|=2}L_\beta\right)$ 阶对称正定阵，Q_K^2 是 $\left(\sum_{|\beta|=2}L_\beta\right)\times M_2$ 阶矩阵。本书总假定 M_2,L_β 与 K 无关。A_K^2 的具体形式是

$$A_K^2=\begin{pmatrix} A_K^{(2,0)} & & 0 \\ & A_K^{(1,1)} & \\ 0 & & A_K^{(0,2)} \end{pmatrix},$$

其中 $A_K^\beta(|\beta|=2)$ 是 L_β 阶对称正定阵，它的第 ij 分量是 $\int_K p_{i,K}^\beta p_{j,K}^\beta dx$。$Q_K^2$ 的具体表达式是

$$Q_K^2=\begin{pmatrix} Q_K^{(2,0)} \\ Q_K^{(1,1)} \\ Q_K^{(0,2)} \end{pmatrix}.$$

$Q_K^\beta(|\beta|=2)$ 是 $L_\beta\times M_2$ 阶矩阵。如果

$$\bigcup_{|\beta|=2}\bigcup_{i=1}^{2}D^{e_i}N_K^\beta\subset\bigcap_{i=1}^{2}N_K^{e_i}. \tag{5.4.7}$$

成立，则 $\forall p\in N_K^\beta,|\beta|=2,D^{e_i}p\in N_K^{e_j}$，$j,i=1,2$。于是 (5.4.1) 的第一个等式可代入后三个的第二个积分项中，将右端化成只与 $\Pi_{\partial K}v,\Pi_{\partial K}^s v,\Pi_{\partial K}^N v$ 和 $\Pi_K^0 v$ 有关的式子。这时 $Q_K^{(2,0)}$ 的第 ij 元素是

$$\int_{\partial K}p_{i,K}^{(2,0)}(N_1^2 g_{j,K}^N-N_1N_2g_{j,K}^s)ds-\int_{\partial K}D^{e_1}p_{i,K}^{(2,0)}g_{j,K}N_1ds$$

$$+\int_K D^{(2,0)}p_{i,K}^{(2,0)}G_{j,K}dx;$$

$Q_K^{(1,1)}$ 的第 ij 元素是

$$\frac{1}{2}\left\{\int_{\partial K}p_{i,K}^{(1,1)}(2N_1N_2g_{j,K}^N+(N_1^2-N_2^2)g_{j,K}^s)ds\right.$$

$$-\int_{\partial K}(D^{e_1}p_{i,K}^{(1,1)}N_2+D^{e_2}p_{i,K}^{(1,1)}N_1)g_{j,K}ds$$

$$\left.+\int_K 2D^{(1,1)}p_{i,K}^{(1,1)}G_{j,K}dx\right\};$$

$Q_K^{(0,2)}$ 的第 ij 元素是

$$\int_{\partial K}p_{i,K}^{(0,2)}(N_2^2g_{j,K}^N+N_1N_2g_{j,K}^s)ds$$

$$-\int_{\partial K}D^{e_2}p_{i,K}^{(0,2)}g_{j,K}N_2ds$$

$$+\int_K D^{(0,2)}p_{i,K}^{(0,2)}G_{j,K}dx.$$

对于 $|\beta|=1$，通过(5.4.1)也可得(5.3.11)式，只是 M_1 换成了 M_2。

与第三节一样，构造 W_h^2，只须完成下述三条：1) 给定单元的几何形状，确定集合 $\mathscr{K}$；2) 确定节点参数；3) 给出 $\Pi_K^0,\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^s,\Pi_{\partial K}^N$ 及 N_K^β。下面给出几个例子。对以(x_1^i,x_2^i)，$i=1,2,3$，为顶点的三角形，记 λ_i 是相对于顶点 i 的面积坐标，$1\leqslant i\leqslant 3$。令 $b_1=x_2^2-x_2^3,c_1=x_1^3-x_1^2,b_i,c_i(i=2,3)$ 可按下标轮换 $1\to2\to3\to1$ 得到。记 l_i 是 i 点的对边，同时用它表示该边的长度，$|K|$ 是单元$|K|$的面积。

TQC6 元。六参数三角形拟协调元，又称 Morley 元。$\mathscr{K}$

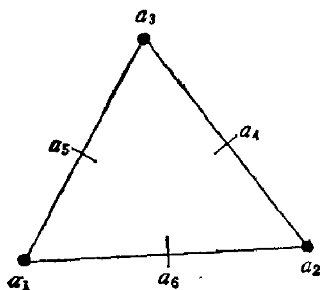


图 5.4.1

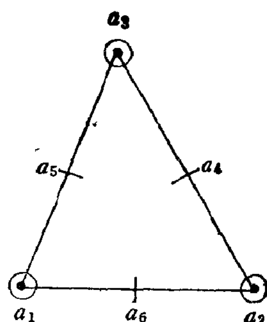


图 5.4.2

由三角形构成。6 个节点参数是K的顶点处的函数值和各边中点的法向导数值，见图 5.4.1。取 $N_K^\beta = P_{2-|\beta|}(K)$，$0 < |\beta| \leqslant 2$。$\forall v \in C^2(K)$，$\Pi_{\partial K}^N v|_{l_i} = \dfrac{\partial v}{\partial N}(a_{i+3}), i=1,2,3, \Pi_{\partial K}^s v|_{l_1} = \dfrac{1}{l_1}(v(a_3) - v(a_2)), \Pi_{\partial K}^s v|_{l_2} = \dfrac{1}{l_2}(v(a_1) - v(a_3)), \Pi_{\partial K}^s v|_{l_3} = \dfrac{1}{l_3}(v(a_2) - v(a_1))$。令 $q_i = -2|K|l_i^{-1}\lambda_i(1-\lambda_i)$，$i = 1,2,3$，$p_1 = \lambda_1^2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3, \alpha_i = \dfrac{b_1 b_i + c_1 c_i}{2|K|l_i}, i = 2,3$。$p_2, p_3$ 按下标轮换 $1\to2\to3\to1$ 可得。

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{3} p_i v(a_i) + \sum_{i=1}^{3} q_i \frac{\partial v}{\partial N}(a_{i+3}). \qquad (5.4.8)$$

$\Pi_{\partial K} v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}$。恰好按上述定义构造，有 $\Pi_K^\beta v = D^\beta \Pi_K^0 v, |\beta| \leqslant 2$。实际上，$\Pi_{\partial K}^N$ 和 $\Pi_{\partial K}^s$ 可取为 $\dfrac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0, \dfrac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0$，这是一个非协调元。

TQC9 元。又称9参数三角形拟协调元。$\mathscr{K}$ 由三角形构成。节点参数是三角形K三个顶点 a_i 处的函数值和两个一阶导数值，见图 5.3.11。对 $|\beta| > 0, N_K^\beta = P_{3-|\beta|}(K); \Pi_K^0 v, \Pi_{\partial K} v, \Pi_{\partial K}^s v, \Pi_{\partial K}^N v$

如下定义

$$
\begin{cases}
\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2(3-2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3)v(a_i) \\
\qquad + \sum_{\substack{1\le i,j\le 3\\ i\ne j}} \frac{1}{2}\lambda_i\lambda_j(1+\lambda_i-\lambda_j)Dv(a_i)(a_j-a_i), \\
\Pi_{\partial K} v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^s v = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K}, \\
\Pi_{\partial K}^N v|_{l_i} = \sum_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}} \lambda_j l_i^{-1} Dv(a_j)(b_i,c_i)^T, i=1,2,3.
\end{cases}
\tag{5.4.9}
$$

可以验证 $\Pi_{\partial K}^N v|_{l_i}$ 在 $a_j(j\ne i)$ 点的值等于 $\left.\frac{\partial v}{\partial N}\right|_{l_i}$ 在 a_j 点的值.

TQC 12 元. 又称 12 参数三角形拟协调元. $\mathscr{K}$ 由全体三角形组成. 节点参数是三角形顶点的函数值和两个一阶导数值和各边中点的法向导数值，见图 5.4.2. $N_K^\beta = P_{4-|\beta|}(K)$, $|\beta|>0$. 对于 $v\in C^2(K)$,

$$
\begin{aligned}
\Pi_K^0 v = &\sum_{i=1}^{3}\Big[\lambda_i^2(3-2\lambda_i) \\
&- 2\sum_{j\ne i}\frac{b_ib_j+c_ic_j}{l_j^2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]v(a_i) \\
&+ \sum_{\substack{1\le i,j\le 3\\ i\ne j}}\Big[\lambda_i^2\lambda_j - \frac{1}{3}\sum_{k\ne i,j}\frac{b_ib_k+c_ic_k}{l_k^2} \\
&\times \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]Dv(a_i)(a_j-a_i) \\
&- \sum_{i=1}^{3}\frac{8|K|}{3l_i}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{\partial}{\partial N}v(a_{i+3}),
\end{aligned}
\tag{5.4.10}
$$

$\Pi_{\partial K} v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^s v = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K}$. 对 $i=1,2,3$,

$$\Pi_{\partial K}^{N} v|_{l_i} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} \lambda_j(2\lambda_j - 1) l_i^{-1} Dv(a_j)(b_i, c_i)^{T}$$

$$+ \sum_{\substack{j \neq k \\ j,k \neq i}} 4\lambda_j \lambda_k \frac{\partial v}{\partial N}(a_{i+3}). \tag{5.4.11}$$

对 $i = 1,2,3$，令 w_i 是这样的三次多项式，w_i 在K的三个顶点处的函数值及两个导数值及在 l_i 边中点的法向导数值与 v 在相应点的相应值相等，这样的三次多项式是唯一确定的(见第六章)．有时也称 w_i 是用K的三个顶点处的函数值及两个导数值和在 l_i 边中点的法向导数值插值得到的三次多项式．今后遇到类似的说法，按上述意义理解．于是 $\Pi_K^0 v = \frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3)$。

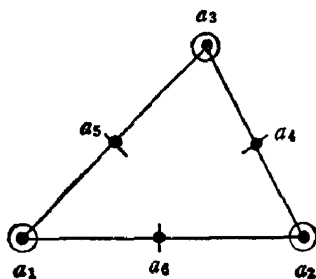


图 5.4.3

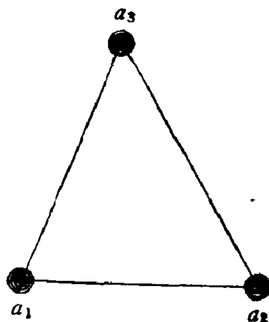


图 5.4.4

TQC15 元。又称 15 参数三角形拟协调元．$\mathscr{K}$ 由三角形组成．节点参数是K的顶点处的函数值及两个一阶导数值，各边中点的函数值和法向导数值，见图 5.4.3．取 $N_K^\beta = P_{4-|\beta|}(K), |\beta| > 0$。对于 $v \in \mathring{C}^2(K)$，$\Pi_{\partial K}^N v$ 由(5.4.11)给出，$\Pi_K^0 v$ 是由节点参数插值得到的四次多项式，具体形式是

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^{3} \Big[\lambda_i^2(2\lambda_i - 1)(5 - 4\lambda_i)$$

$$+ 2\sum_{j\neq i}\frac{1}{l_j}(b_jb_i + c_jc_i)(2\lambda_j - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]v(a_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{l_i}8|K|(2\lambda_i - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 v(a_{i+3})$$

$$+ 16\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\Big[\lambda_i^2\lambda_j^2 + \sum_{k\neq i,j}\frac{1}{l_k}(b_ib_k + c_ic_k$$

$$+ b_jb_k + c_jc_k)(2\lambda_k - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]$$

$$\times \sum_{k\neq i,j} v(a_{k+3}) + \sum_{i\neq j}\Big[\lambda_i^2(2\lambda_i - 1)\lambda_j$$

$$+ 2\sum_{k\neq i,j}\frac{b_jb_k + c_ic_k}{l_k}(2\lambda_k - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]$$

$$\times Dv(a_i)(a_j - a_i), \tag{5.4.12}$$

$\Pi_{\partial K}v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}, \Pi'_{\partial K}v = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K}$.

Bell 元。这是一协调元。$\mathscr{K}$ 由三角形构成。18 个节点参数是K的顶点处的函数值，两个一阶导数值和三个二阶导数值，见图 5.4.4。由于是协调元，只须给出 Π_K^0。对于 $v\in C^2(K)$，$\Pi_K^0 v\in P_5(K)$，在K的每条边上 $\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0 v|_{l_i}\in P_3(l_i)$。$\Pi_K^0 v$ 由节点参数插得到。

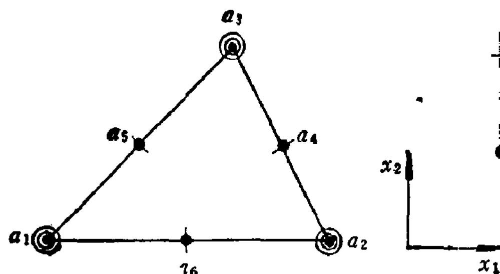


图 5.4.5

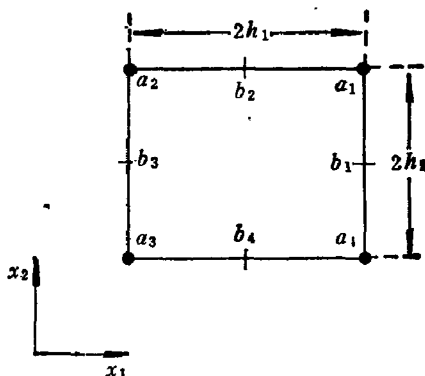


图 5.4.6

Argyris 元。这也是一个协调元。$\mathscr{K}$ 由三角形构成。21个节点参数是三角形顶点的函数值，二个一阶导数值和三个二阶导数值，各边中点的法向导数值，见图 5.4.5。对 $v \in C^2(K)$，$\Pi_K^0 v$ 是由节点参数插值得到的五次多项式。

上面六个例子均是三角形元，下面给出四个矩形元。令 $\mathscr{K}$ 由各边分别平行坐标轴的矩形构成。对于以 x^0 为形心，$2h_1, 2h_2$ 为平行于 x_1 和 x_2 轴的边的长度的矩形K，引入下述变换：

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + \xi_1 h_1 \\ x_2 = x_2^0 + \xi_2 h_2 \end{cases}, \quad |\xi_i| \leqslant 1. \tag{5.4.13}$$

RQC8 元。也称 8 参数拟协调元。8 个节点参数是K的顶点 a_i 的函数值和各边中点 b_i 的法向导数值，见图 5.4.6。取 $N_K^{ci} = P_2(K), i = 1,2, N_K^{(2,0)} = \text{span}\{1, \xi_1\}, N_K^{(1,1)} = P_0(K), N_K^{(0,2)} = \text{span}\{1, \xi_2\}$。这里 $\text{span}\{\cdots\}$ 表示由$\{\cdots\}$张成的子空间。记 a_i 的坐标为 $(x_1^0 + \xi_1^i h_1, x_2^0 + \xi_2^i h_2)$，$b_i$ 的坐标为 $(x_1^0 + \eta_1^i h_1, x_2^0 + \eta_2^i h_2)$，记 b_i 所在的边为 $F_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$。对 $v \in C^2(K)$，$\Pi_K^0 v$ 和 $\Pi_{3K}^N v$ 表达式如下：

$$\Pi_K^0 v = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} (1 + \xi_1^i \xi_1)(1 + \xi_2^i \xi_2) v(a_i)$$

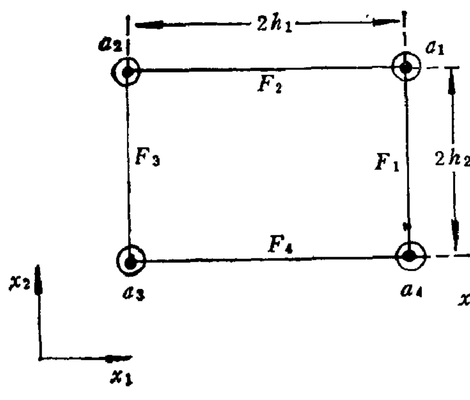


图 5.4.7

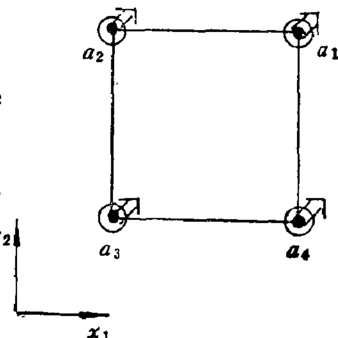


图 5.4.8

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}h_i\eta_i^j(\xi_i\xi_j-1)\frac{\partial v}{\partial N}(b_i), \qquad (5.4.14)$$

$$\Pi_{\partial K}^N v|_{F_j}=\frac{\partial v}{\partial N}(b_j)+\frac{1}{4h_j}\sum_{i=1}^{4}\xi_i^j\xi_{j+1}^j\xi_{j+1}v(a_i), j=1,2,3,4,$$

(5.4.15)

其中 $h_3=h_1, h_4=h_2, \xi_{2k+1}^i=\xi_1^i, \xi_{2k+2}=\xi_2$. $\Pi_{\partial K}v=\Pi_K^0 v|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^i v$ $\frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K}$. 若记 $\phi_K^2(v)=(v(a_1),v(a_2),v(a_3),v(a_4),\frac{\partial v}{\partial N}(b_1),\frac{\partial v}{\partial N}(b_2),\frac{\partial v}{\partial N}(b_3),\frac{\partial v}{\partial N}(b_4))^T$, 则 A_K^2 和 Q_K^2 的具体形式是

$$A_K^2=h_1h_2\begin{pmatrix}4 & & & & & \\ & \frac{4}{3} & & & 0 & \\ & & 4 & & & \\ & 0 & & 4 & & \\ & & & & & \frac{4}{3}\end{pmatrix},$$

$$Q_K^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 2h_2 & 0 & 2h_2 & 0\\ \frac{h_2}{h_1} & -\frac{h_2}{h_1} & -\frac{h_2}{h_1} & \frac{h_2}{h_1} & 2h_2 & 0 & -2h_2 & 0\\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h_1 & 0 & 2h_1\\ \frac{h_1}{h_2} & \frac{h_1}{h_2} & -\frac{h_1}{h_2} & -\frac{h_1}{h_2} & 0 & 2h_1 & 0 & -2h_2\end{bmatrix}.$$

(5.4.16)

$\Pi_K^0 v$ 和 $\Pi_{\partial K}^N v$ 是这样构造出来的,对于 $i=1,2,3,4$, 用 $a_1,\cdots,a_4$ 点的函数值及 b_i, b_{i+1} 点的法向导数值插值得一个二次多项式,再将 b_{i+1} 点换成 b_{i-1} 点又得一个二次多项式,两式相加记为

$2w^i$. 则 $\Pi_{\partial K}^N v|_{F_i} = \frac{\partial}{\partial N} w^i|_{F_i}$, $\Pi_K^0 v = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 w^i$.

Adini 元。这是一非协调元。12 个节点参数是K的顶点 a_i 处的函数值和两个一阶导数值,见图 5.4.7. 记 $I = \{(i,j) | i,j \leqslant 4, i \neq j, |i-j| = 1$ 或 $3\}$, 则 $v \in C^2(K)$, $\Pi_K^0 v$ 表示为

$$\Pi_K^0 v = \sum_{i=1}^4 p_i v(a_i) + \sum_{(i,j)\in I} p_{i,j} Dv(a_i)(a_j - a_i), \quad (5.4.17)$$

其中

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)\left(1 + \frac{\xi_1+\xi_2}{2} - \frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\right), \\ p_{1,2} = \frac{1}{16}(1+\xi_2)(1+\xi_1)^2(1-\xi_1), \\ p_{1,4} = \frac{1}{16}(1+\xi_1)(1+\xi_2)^2(1-\xi_2), \cdots \end{cases} \quad (5.4.18)$$

可以验证 $\Pi_K^0 v(a_i) = v(a_i), Dv(a_i) = D\Pi_K^0 v(a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

RQC12 元。也称 12 参矩形拟协调元。节点参数与 Adini 元相同。$N_K^{e_i} = P_3(K), i=1,2; N_K^{(2,0)} = N_K^{(0,2)} = \mathrm{span}\{1,\xi_1,\xi_2,\xi_1\xi_2\}, N_K^{(1,1)} = \mathrm{span}\{1,\xi_1,\xi_2,\xi_1^2,\xi_2^2\}$. $v \in C^2(K)$, $\Pi_K^0 v$ 由(5.4.17) 定义, $\Pi_{\partial K} v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}$, $\Pi_{\partial K}^s v = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_{\partial K}^0 v|_{\partial K}$,

$$\Pi_{\partial K}^N v|_{F_1} = \frac{1}{2}(1+\xi_2) D^{e_1} v(a_1) + \frac{1}{2}(1-\xi_2) D^{e_1} v(a_4), \quad (5.4.19)$$

对其它边可以类似地定义 $\Pi_{\partial K}^N v$.

Bogner-Fox-Schmit 元。这是一个协调元,16 个节点参数是K顶点处的函数值,两个一阶导数值和 $D^{(1,1)}$. 导数值,见图 5.4.8. $\forall v \in C^2(K)$, $\Pi_K^0 v \in Q_3(K)$ 由节点参数插值而得。本书简称此元

为 B-F-S 元.

对于插值算子 $\Pi_K^0, \Pi_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^N, \Pi_{\partial K}^t$ 及 N_K^β 等可以不用多项式形式,换成其它形式,例如有理函数,三角函数等等.

上面讨论的都是单元形状是单纯形或平行多面体的情形. 对于是一般形状的情形, 仍然可以按(5.3.5)式和(5.4.1)式定义有限元空间. 如果单元是通过某标准单元的某类映射得到的, 可以通过标准单元 $\hat{K}$ 上的算子 $\Pi_{\hat{K}}^\beta$ 等,按照 $D_{\hat{x}}^\beta$ 和 D_x^α 等的对应关系定义一般单元K上的 Π_K^β 等. 这些内容已超出本书的范围,请有兴趣的读者查阅有关文献.

本章中的有限元空间是通过映射 $\Pi_h^m: C^m(\bar{\Omega}) \to W_h^m$ 得到的. 由第三、四节的讨论可知, Π_K^β 是由 $G_{i,K}, g_{i,K}(g_{i,K}^t, g_{i,K}^N)$ 和 $\phi_{i,K}, 1 \leqslant j \leqslant M_m$ 唯一确定的, 所以对有限元空间也可以这样描述. 把 $\phi_{1,K}, \cdots, \phi_{M_m,K}$ 看成是R中的点, 定义K上的 $L^{m,\sigma}(K)$ 的子空间 V_K^m 为所有这样元素的集合, $v \in V_K^m$, 则 $v^0 = \sum_{i=1}^{M_m} \xi_i G_{i,K}, (\xi_1, \cdots, \xi_{M_m})^T \in R^{M_m}$. 对 $0<|\beta| \leqslant m$, v^β 按 (5.3.5) 或 (5.4.1)定义,将其中的 $\Pi_K^\beta v$ 换为 $v^\beta, \Pi_{\partial K}v, \Pi_{\partial K}^N v, \Pi_{\partial K}^t v$ 分别换成 $\sum_{i=1}^{M_m} \xi_i g_{i,K}$, $\sum_{i=1}^{M_m} \xi_i g_{i,K}^N$, $\sum_{i=1}^{M_m} \xi_i g_{i,K}^t$. 这样 $W_h^m = \{w \in L^{m,\sigma}(\Omega)$, $w|_K \in V_K^m, \forall K \in K_h$, w 通过 $F \in \mathscr{F}_h$ 时满足一定的要求$\}$. 例如用 SLCk 元构造的有限元空间等于空间 $\{w \in W^{1,\sigma}(\Omega), w|_K \in P_k(K)\}$. 这样的描述比前面的要简单,但讨论有限元的逼近性还需要给出算子 Π_K^0 等.

上面介绍的单元中, Bell 元, Argyris 元, Adini 元, Bogner-Fox-Schmit 元 (B-F-S 元) 分别是以给出者的名字命名的. TQC6 元是 Morley 首先提出的,唐立民等用拟协元技巧重新给出, TQC9 元和 TQC12 元也是他们给出的[4,20]. 蒋和洋给出了 TQC15 元并用拟协元技巧导出了 Bell 元[10]. RQC12 元是石广玉给出的 (参见大连工学院硕士论文, 十二参数矩形拟协调板单元,1980), RQC8 元是王鸣给出的.

在本章第三节中介绍的 Zienkiewicz 元，通常是当作逼近 Sobolev 空间 $W^{2,\sigma}(\Omega)$ 的有限元的．这是一个非常有趣的单元，不少力学家和数学家对它进行了研究．在三角形的所有边都分别平行于某个固定的直线时，它是收敛的，否则是不收敛．

第六章　有限元的基本假设

在给出了有限元空间的构造方法之后，本章讨论关于构造有限元空间的 $N_K^\beta, \Pi_K^0, \Pi_{\partial K}$ 等的基本条件. 这些条件要使有限元空间具有良好的对 Sobolev 空间逼近性质，而且还要容易验证、适用范围广泛. 除此之外，这些条件要有一定的力学意义. 本章给出了六个条件：仿射连续性，尺度不变性，弱连续性，逼近性，单元秩条件和强 F-E 检验. 第一节叙述了这六个基本条件，第二节讨论仿射连续性，尺度不变性和弱连续性的验证，第三、四、五节分别讨论逼近性，单元秩条件和强 F-E 检验的验证.

§6.1　有限元的基本条件

记 $\mathrm{N} = \{1, 2, \cdots\}$，令 $\Sigma_K^1 = \{\Pi_K^0, \Pi_{\partial K}, N_K^\beta\}$，$\Sigma_K^2 = \{\Pi_K^0, \Pi_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^S, \Pi_{\partial K}^N, N_K^\beta\}$. 首先设 $\mathscr{K}$ 的元素或者全是单纯形或是全是平行多面体. 并且假设 $\mathscr{K}$ 具有下述性质：1）若 $K_m \in \mathscr{K}$，$m \in \mathrm{N}$，且 B_{K_m} 收敛于 B_{K_0}，K_0 是一个单纯形或平行多面体，则 $K_0 \in \mathscr{K}$；2）$\forall K \in \mathscr{K}$，$\forall \theta > 0$，记 $\tilde{K} = \{\tilde{x} \mid \tilde{x} = \theta x, x \in K\}$，则 $\tilde{K} \in \mathscr{K}$.

由第五章第二节可知，任意一个单纯形或平行多面体 K，都有仿射变换 $F_K: \hat{K} \to K$ 使得 $F_K \hat{K} = K$. 所以可以经 F_K 变换将 K 上的 Π_K^0，$\Pi_{\partial K}$ 及 N_K^β 化成定义在 $\hat{K}$ 上的映射 $\hat{\Pi}_K^0, \hat{\Pi}_{\partial K}$ 和函数空间 $\hat{N}_K^\beta$. 如果对不同的 $K, \hat{\Pi}_K^0, \hat{\Pi}_{\partial K}$ 和 $\hat{N}_K^\beta$ 都相同，那么任意多的 Σ_K^1 的讨论就化成了标准单元 $\hat{K}$ 上的 $\Sigma_{\hat{K}}^1$ 的讨论. Ciarlet 注意到了这一点，提出了仿射族的概念，并用仿射变换的技巧解决了一大类有限元的逼近性.

称 $\Sigma_K^m (m = 1, 2)$ 是仿射族，如对 $\forall K \in \mathscr{K}$，下述两个条件成

立：1) $\forall K\in\mathscr{K},\forall v\in C^{sm}(K)$，$\widehat{\Pi_K^0 v}=\Pi_{\hat K}^0\hat v$，$\widehat{\Pi_{\partial K}v}=\Pi_{\partial\hat K}\hat v$；当 $m=2$ 时，还有 $\widehat{\Pi_{\partial K}^S v}=\|B_K^{-T}\hat N\|\det B_K\Pi_{\partial\hat K}^S\hat v$，$\widehat{\Pi_{\partial K}^N v}=\|B_K^{-T}\hat N\|\Pi_{\partial\hat K}^N\hat v+\hat N^T B_K^{-1}B_K^{-T}\hat s\Pi_{\partial\hat K}^s\hat v/\|B_K^{-T}\hat N\|$；2) 对 $i=1,\cdots,m$，存在 $N_{\hat K}^i\subset P(\hat K)$，使得 $N_K^\beta=\{p|p=\hat p\cdot F_K^{-1},\ \forall\hat p\in N_{\hat K}^i\}$，$|\beta|=i$，$\forall K\in\mathscr{K}$；或者当所有的 $K\in\mathscr{K}$，B_K 都是对角阵时，有 $N_K^\beta=\{p|p=\hat p\cdot F_K^{-1},\ \forall\hat p\in N_{\hat K}^\beta\}$，$|\beta|\leqslant m$.

当把单元构造所用到的法向导数数值做节点参数时，仿射族的性质不再成立，Ciarlet 的补救方法——几乎仿射族提得勉强.我们将仿射族中相等的要求改为连续性要求再加上尺度不变性就将仿射族的概念拓广了.

称 $\Sigma_K^m(m=1,2)$ 具有仿射连续性，如果当 $\{K_\tau\}_{\tau=0}^\infty\subset\mathscr{K}$，$B_{K_\tau}$ 收敛于 B_{K_0} 时，下述两个结论成立：1) 对 $j=1,\cdots,M_m$，$\hat\phi_{j,K_\tau}$ 在 $C^{sm}(\hat K)$ 的对偶空间的范数下收敛于 $\widehat{\phi_{j,K_0}}$，$\widehat{G_{j,K_\tau}}$ 一致收敛于 $\widehat{G_{j,K_0}}$，$\widehat{g_{j,K_\tau}}(\widehat{g_{j,K_\tau}^s},\widehat{g_{j,K_\tau}^N})$ 在 $L^\infty(\partial\hat K)$ 意义下收敛于 $\widehat{g_{j,K_0}}(\widehat{g_{j,K_0}^s},\widehat{g_{j,K_0}^N})$；2) 对$0<|\beta|\leqslant m$，$l=1,\cdots,L_\beta$，$\hat p_{l,K_\tau}^\beta$ 一致收敛于 $\hat p_{l,K_0}^\beta$.

对定义在K或 ∂K 上的函数 w，记 $\tilde w(\tilde x)=w(\theta^{-1}\tilde x)$，$\tilde x\in\tilde K=\{y|y=\theta x,x\in K\}$ 或 $\partial\tilde K$. 称 $\Sigma_K^m(m=1,2)$ 具有尺度不变性，如果 $\forall K\in\mathscr{K},\theta>0$，当 $w\in C^{sm}(K)$ 时有 $\widetilde{\Pi_K^0 w}=\Pi_{\tilde K}^0\tilde w$，$\widetilde{\Pi_{\partial K}w}=\Pi_{\partial\tilde K}\tilde w(\widetilde{\Pi_{\partial K}^s w}=\theta\Pi_{\partial\tilde K}^s\tilde w,\widetilde{\Pi_{\partial K}^N w}=\theta\Pi_{\partial\tilde K}^N\tilde w)$，且当 $0<|\beta|\leqslant m$ 时，$\{\widetilde{p_{l,K}^\beta},l=1,\cdots,L_\beta\}$ 是 $N_{\tilde K}^\beta$ 的一组基.

用 Σ_K^m 构造的 ∂K 上的函数通过单元内表面时可以是间断的. 由于要近似连续的函数，所以要有一定的连续性，为此引进弱连续性的条件. 称 $\Sigma_K^m(m=1,2)$具有弱连续性，如果 $\forall K\in\mathscr{K}$，在K的每个 $(n-1)$ 维表面 F 上，$\Pi_{\partial K}w|_F(\Pi_{\partial K}^S w|_F,\Pi_{\partial K}^N w|_F)\in C(F)$，$\forall w\in C^{sm}(K)$，而且存在 $C(F)$ 上的线性连续泛函 $\phi_F(\phi_F^S,\phi_F^N)$ 具有性质：1) $\phi_F(1)\neq0(\phi_F(1)\phi_F^S(1)\phi_F^N(1)\neq0)$且 $\phi_F(\phi_F^S;\phi_F^N)$ 的范数不超过 1；2) 若 K_1,K_2 的交集 F 是 K_1,K_2 的公共 $n-1$ 维表面，则 $\forall w\in C^{sm}(K_1\cup K_2)$，$\phi_F(\Pi_{\partial K_1}w|_F-\Pi_{\partial K_2}w|_F)=0\,(\phi_F^S(\Pi_{\partial K_1}^S w|_F+\Pi_{\partial K_2}^s w|_F)=\phi_F^N(\Pi_{\partial K_1}^N w|_F+\Pi_{\partial K_2}^N w|_F)$

$=0$)。

用 Σ_K^m 构造的有限元空间 W_h^m 要逼近 Sobolev 空间 $W^{m,\sigma}(\Omega)$，所以要具有一定逼近精度。这一点由下述逼近性保证。称 Σ_K^1 具有逼近性，如果存在 $r_i\in\mathbf{N}, i=1,2,3$，使得 $r_i+1-s_1>\frac{n}{\sigma}$，$i=1,2$，且当 $p\in P_{r_1}(K)$ 时 $\Pi_K^0 p=p$，当 $p\in P_{r_2}(K)$ 时，$\Pi_{\partial K}p=p/_{\partial K}$；$P_{r_3-1}(K)\subset\bigcap\limits_{|\beta|=1}N_K^\beta$。类似地，称 Σ_K^2 具有逼近性，如果存 $r_i\geqslant 2(i=1,\cdots,5)$ 使得 $r_i+1-s_2>\dfrac{2}{\sigma}, 1\leqslant i\leqslant 4$，且 $\forall p\in P_{r_1}(K)$，$\Pi_K^0 p=p$；$\forall p\in P_{r_2}(K)$，$\Pi_{\partial K}p=p|_{\partial K}$；$\forall p\in P_{r_3}(K)$，$\Pi_{\partial K}^S p=\dfrac{\partial p}{\partial s}|_{\partial K}$；$\forall p\in P_{r_4}(K)$，$\Pi_{\partial K}^N p=\dfrac{\partial p}{\partial N}\Big|_{\partial K}$；对于 $j=1,2$，$P_{r_5-j}(K)\subset\bigcap\limits_{|\beta|=j}N_K^\beta$。

逼近性的核心是：对 Σ_K^m，由第五章的方法构造的算子 Π_K^β ($|\beta|\leqslant m$) 要对 m 次多项式保持不变：$\Pi_K^\beta p=D^\beta p, \forall p\in P_m(K)$。从力学的角度看，是保证有限元空间能生成所有的常应变状态。

称 $\Sigma_K^m(m=1,2)$ 满足单元秩条件，如果对任意 $K\in\mathscr{K}$，矩阵 Q_K^m 的秩是 $M_m-\dfrac{1}{2}m(m+1)$。

单元秩条件的力学意义是零能模式只能是刚体位移。从数学的角度来看，$\Pi_K^\beta v$ 是对应 $D^\beta\Pi_K^0 v$ 的，虽然导数关系不一定成立，但有一定的导数作用。单元秩条件的要求是：从 $\Pi_K^\beta v(|\beta|=m)$ 为 0，导出 $\Pi_K^0 v$ 是 $m-1$ 次多项式。

设 $r\in\{0\}+\mathbf{N}$。称 Σ_K^1 通过 r 阶强 F-E 检验，如果 $\forall K\in\mathscr{K}$，$\Pi_{\partial K}$ 可以分为两部分：$\Pi_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^F+\Pi_{\partial K}^E$，且具有下述性质：(1) $\forall p\in P_0(K)$，$\Pi_{\partial K}^F p=p|_{\partial K}$；(2) 如果 $K_1,K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是公共 $(n-1)$ 维表面，则 $\forall w\in C^1(K_1\cup K_2)$，$\forall p\in P_r(K_1\cup K_2)$，有

$$\int_F p(\Pi^E_{\partial K_1} w - \Pi^E_{\partial K_2} w) ds = 0; \qquad (6.1.1)$$

(3) $\forall w \in C^1(K)$, $\forall p \in P_r(K)$,

$$\int_{\partial K} p \Pi^E_{\partial K} w N_i ds = 0, \ i = 1, \cdots, n. \qquad (6.1.2)$$

类似地，称 Σ^2_K 通过 r 阶强 F-E 检验，如果对 $\forall K \in \mathscr{K}$，$\Pi^S_{\partial K}$，$\Pi^N_{\partial K}$ 可以分为两部份：$\Pi^S_{\partial K} = \Pi^{SF}_{\partial K} + \Pi^{SE}_{\partial K}$，$\Pi^N_{\partial K} = \Pi^{NF}_{\partial K} + \Pi^{NE}_{\partial K}$，且具有下述性质：(1) $\forall p \in P_1(K)$，$\Pi^{SF}_{\partial K} p = \left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_{\partial K}$，$\Pi^{NF}_{\partial K} p = \frac{\partial}{\partial N} p \,\big|_{\partial K}$；(2) 如果 $K_1, K_2 \in \mathscr{K}$，$F = K_1 \cap K_2$ 是公共边，则 $\forall w \in C^2(K_1 \cup K_2)$，$\forall p \in P_r(K_1 \cup K_2)$，有

$$\int_F p(\Pi^{SF}_{\partial K_1} w + \Pi^{SF}_{\partial K_2} w) ds = \int_F p(\Pi^{NF}_{\partial K_1} w + \Pi^{NF}_{\partial K_2} w) ds = 0; \qquad (6.1.3)$$

(3) $\forall w \in C^2(K)$，$\forall p \in P_r(K)$，

$$\int_{\partial K} p \begin{pmatrix} N_1^2 & -N_1N_2 \\ 2N_1N_2 & N_1^2 - N_2^2 \\ N_2^2 & N_1N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi^{NE}_{\partial K} w \\ \Pi^{SE}_{\partial K} w \end{pmatrix} ds = 0. \qquad (6.1.4)$$

0 阶强 F-E 检验简称为强 F-E 检验. 强 F-E 检验的力学意义是：位移可以分为两部份，一部分通过单元内边界是积分连续的，另一部分对刚体位移没有贡献且产生的应变与常应力作用所产生的能量为 0.

本书对构造有限元空间的 Σ^1_K 和 Σ^2_K 的基本假设如下：Σ^m_K 具有仿射连续性，尺度不变性，弱连续和逼近性，满足单元秩条件且通过强 F-E 检验. 本章的其它内容就是讨论这些条件的验证.

H_m 的条件可分为两组，第一组是仿射连续性，尺度不变性和弱连续性，第二组是逼近性，单元秩条件和强 F-E 检验. 第一组的特点是容易验证，常规的有限元都能满足，甚至构造或检验单元时可以不去考虑，这里要求是为了数学的证明严格性，仿射连续性和尺度不变性可以看成是 N^p_K 的几何性质. 第二组在有限元方

法的解的存在唯一性，收敛性和误差估计的讨论中起着决定性的作用。

§6.2 仿射连续性，尺度不变性和弱连续性

从对具体例子，比如第五章给出的单元，验证仿射连续性和尺度不变性的结果来看，这两个性质都是成立的。本节试图给出一些简单直观的条件保证它们成立。

首先，对于空间 N_K^β，设存在一个固定的 n 重指标构成的集合 I^β，对所有的 $K\in\mathscr{K}$，$N_K^\beta=\text{span}\ \{(x-b_K)^\alpha|\alpha\in I^\beta\}$，则 N_K^β 满足仿射连续性和尺度不变性的要求。事实上，可以取 $N_{\hat K}^\beta$ 的基是 $(x-b_K)^\alpha$，$\alpha\in I^\beta$。由于 $x-b_K=B_K\hat{x}$，所以 $(\widehat{x-b_K})^\alpha=(B_K\hat{x})^\alpha$ 关于 B_K 是连续的，因此 N_K^β 满足仿射连续性的要求。当 $\theta>0$，$K\in\mathscr{K}$ 时，显然 $(x-b_K)^\alpha=(\theta^{-1}\tilde{x}-\theta^{-1}b_{\tilde K})^\alpha$，$\alpha\in I^\beta$ 是 $N_{\tilde K}^\beta$ 的一组基。

现在考虑节点参数 $\phi_{j,K}$，$1\leqslant j\leqslant M_m$。假设对 $j=1,\cdots,M_m$，存在 $m(j)\leqslant S_m$，使得 $\forall K\in\mathscr{K}$，存在 $T_{j,K,1},\cdots,T_{j,K,m(j)}\in R^n-\{0\}$，$\phi_{j,K}$ 是下述三种形式之一：

$$\begin{cases}\phi_{j,K}(v)=\dfrac{\partial^{m(j)}v}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}(b_{j,K}),\quad b_{j,K}\in K,\\[2ex] \phi_{j,K}(v)=\dfrac{1}{|K|}\displaystyle\int_K\dfrac{\partial^{m(j)}v}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}dx,\\[2ex] \phi_{j,K}(v)=\dfrac{1}{|F_j|}\displaystyle\int_{F_j}\dfrac{\partial^{m(j)}v}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}ds,\end{cases}\tag{6.2.1}$$

F_j 是K的 $n-1$ 维表面。

如果 $b_{j,K}$，F_j 是仿射不变的，即存在 $b_{j,\hat K}$，$\hat F_j$ 使得 $b_{j,K}=F_Kb_{j,\hat K}$，$F_j=F_K\hat F_j$，$\forall K\in\mathscr{K}$ 成立；$\hat T_{j,K,i}$，$1\leqslant i\leqslant m(j)$，关于 B_K 是连续的，例如是坐标轴向量 (∂x_i)，∂K 的法向向量 (∂N) 或切向向量 (∂S) 等，则 $\phi_{j,K}$，$1\leqslant j\leqslant M_m$ 满足仿射连续性的

要求。

现在考虑插值算子 Π_K^0. 设M是与K无关的整数且 $M \leqslant M_m$, $\forall K \in \mathscr{K}$, 当 $v \in C^{sm}(K)$ 时, $\Pi_K^0 v$ 均是线性无关的函数 $p_{1,K}$, $\cdots, p_{M,K}$ 的线性组合, 而 $p_{1,K}, \cdots, p_{M,K}$ 是仿射连续的, 即当 $\{K_\tau\}_{\tau=0}^{\infty} \subset \mathscr{K}$, B_{K_τ} 收敛于 B_{K_0} 时, p_{l,K_τ} 一致收敛于 p_{l,K_0}, $1 \leqslant l \leqslant M$. $\forall K \in \mathscr{K}$, $\theta > 0$, 记 $\tilde{K} = \{y \mid y = \theta x,\ x \in K\}$, 则 $\tilde{p}_{l,K}$ 是 $p_{1,\tilde{K}}, \cdots, p_{M,\tilde{K}}$ 的线性组合。设存在与K无关的整数 $m_1, m_2 \geqslant 0$, $m_1 \leqslant m_2 \leqslant M$, 使得 $\forall v \in c^{sm}(K)$,

$$
\phi_{j,K}(v) = \begin{cases}
\dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}}(b_{j,K}), \quad b_{j,K} \in K, \ 1 \leqslant j \leqslant m_1, \\[2ex]
\dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K \dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} dx, \quad m_1 < j \leqslant m_2, \\[2ex]
\dfrac{1}{|F_j|} \displaystyle\int_{F_j} \dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} ds, F_j \text{是} K \text{的} n-1 \text{维表面}。 \quad m_2 < j \leqslant M.
\end{cases} \tag{6.2.2}
$$

设 $b_{j,K}, F_j$ 是仿射不变的, $\hat{T}_{j,K,i}$, $1 \leqslant i \leqslant m(j)$ 关于 B_K 是连续的, 且 $T_{j,\tilde{K},i} = T_{j,K,i}$, $1 \leqslant i \leqslant m(j)$.

如果 $\forall v \in C^{sm}(K)$, $\Pi_K^0 v$ 由插值参数 $\phi_{j,K}(v)$, $1 \leqslant j \leqslant M$ 唯一确定, 即由下述方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^{m(j)} \Pi_K^0 v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}}(b_{j,K}) = \dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}}(b_{j,K}), \quad 1 \leqslant j \leqslant m_1, \\[2ex]
\dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K \dfrac{\partial^{m(j)} \Pi_K^0 v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} dx = \dfrac{1}{|K|} \displaystyle\int_K \dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} dx, \quad m_1 < j \leqslant m_2, \\[2ex]
\dfrac{1}{|F_j|} \displaystyle\int_F \dfrac{\partial^{m(j)} \Pi_K^0 v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} ds = \dfrac{1}{|F_j|} \displaystyle\int_F \dfrac{\partial^{m(j)} v}{\partial T_{j,K,1} \cdots \partial T_{j,K,m(j)}} ds, \quad m_2 < j \leqslant M
\end{cases} \tag{6.2.3}
$$

唯一确定, 则 Π_K^0 满足仿射连续性和尺度不变性的要求。

事实上, 我们可以证明这一结论。对 $i > M$, $i \leqslant M_m$, 取

$v\in C^{s_m}(K)$ 使得 $\phi_{i,K}(v)=\delta_{ij}$，由于 $\phi_{i,K}(v)=0$，$j<M$，所以 $\Pi_K^0 v=0$，又 $\Pi_K^0 v=\phi_{i,K}(v)G_{i,K}$，$\phi_{i,K}(v)=1$，所以 $G_{i,K}\equiv 0$。对于 $1\leqslant i\leqslant M$，取 $v\in C^{s_m}(K)$ 使得 $\phi_{j,K}(v)=\delta_{ij}$，$1\leqslant j\leqslant s_m$，则 $\Pi_K^0 v=G_{i,K}$，于是 $G_{i,K}=\sum_{l=1}^{M}c_l p_{l,K}$ 时，C_l 由下述方程唯一确定

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^{m(j)}G_{i,K}}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}(b_{j,K})=\delta_{ij}, & 1\leqslant j\leqslant m_1,\\[2ex]
\dfrac{1}{|K|}\displaystyle\int_K\frac{\partial^{m(j)}G_{i,K}}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}dx=\delta_{ij}, & m_1<j\leqslant m_2,\\[2ex]
\dfrac{1}{|F_j|}\displaystyle\int_F\frac{\partial^{m(j)}G_{i,K}}{\partial T_{j,K,1}\cdots\partial T_{j,K,m(j)}}ds=\delta_{ij}, & m_2<j\leqslant M.
\end{cases}
\tag{6.2.4}
$$

上述关于 c_l 的方程组的矩阵显然关于 B_K 是连续的，而且可逆，所以 c_l，$l=1,\cdots,M$ 是 B_K 的连续函数，进而 $G_{i,K}$ 是 B_K 的连续映射。由此推得 Π_K^0 满足仿射连续性的要求。

$\forall K\in\mathscr{K}$，$\theta>0$，记 $\tilde{K}=\{\tilde{x}\,|\,\tilde{x}=\theta x,\ x\in K\}$，则 $b_{j,\tilde{K}}=\theta b_{j,K}$，$\tilde{F}_j=\theta F_j$，所以由(6.2.3)推得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^{m(j)}\widetilde{\Pi_K^0 v}}{\partial T_{j,\tilde{K}1,}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}(b_{j,\tilde{K}})=\dfrac{\partial^{m(j)}\tilde{v}}{\partial T_{j,\tilde{K},1}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}(b_{j,\tilde{K}}),\\
\qquad\qquad 1\leqslant j\leqslant m_1,\\[2ex]
\dfrac{1}{|\tilde{K}|}\displaystyle\int_{\tilde{K}}\frac{\partial^{m(j)}\widetilde{\Pi_K^0 v}}{\partial T_{j,\tilde{K},1}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}d\tilde{x}=\dfrac{1}{|\tilde{K}|}\displaystyle\int_{\tilde{K}}\frac{\partial^{m(j)}\tilde{v}}{\partial T_{j,\tilde{K},1}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}\\
\qquad\qquad d\tilde{x},m_1<j\leqslant m_2,\\[2ex]
\dfrac{1}{|\tilde{F}_j|}\displaystyle\int_{\tilde{F}_j}\frac{\partial^{m(j)}\widetilde{\Pi_K^0 v}}{\partial T_{j,\tilde{K},1}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}d\tilde{s}=\dfrac{1}{|\tilde{F}_j|}\displaystyle\int_{\tilde{F}_j}\frac{\partial^{m(j)}\tilde{v}}{\partial T_{j,\tilde{K},1}\cdots\partial T_{j,\tilde{K},m(j)}}\\
\qquad\qquad d\tilde{s},\ m_2\leqslant j\leqslant M.
\end{cases}
\tag{6.2.5}
$$

由于 $\widetilde{\Pi_K^0 v}$ 可以表示成 $p_{1,\tilde{K}},\cdots,p_{M,\tilde{K}}$ 的线性组合，及(6.2.5)式中将 $\widetilde{\Pi_K^0 v}$ 换成 $\Pi_{\tilde{K}}^0 \tilde{v}$ 仍然成立，所以 $\widetilde{\Pi_K^0 v}=\Pi_{\tilde{K}}^0\tilde{v}$。即 Π_K^0 满足尺度不变性的要求。

如果 $\Pi_K^1,\cdots,\Pi_K^l$ 分别是满足仿射连续性和尺度不变性要求

的插值算子且 t 与 K 无关，则当 Π_K^0 是 $\Pi_K^1,\cdots,\Pi_K^t$ 的与 K 无关的线性组合时，Π_K^0 满足仿射连续性和尺度不变性的要求。

如果 Π_K 是满足仿射连续性和尺度不变性的要求的插值算子，则当 $\Pi_{\partial K}\cdot=\Pi_K\cdot|_{\partial K}$，或者 $\dfrac{\partial}{\partial s}\Pi_K\cdot|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^s\cdot$，或 $\dfrac{\partial}{\partial N}\Pi_K\cdot|_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^N\cdot$ 时相应的算子满足仿射连续性和尺度不变性的要求。

对于 $\Pi_{\partial K},\Pi_{\partial K}^s,\Pi_{\partial K}^N$ 等，考虑它们满足仿射连续性和尺度不变性要求时，也可以对 K 的每个 $(n-1)$ 维表面进行类似的讨论。

在工程力学中实际应用单元中，作者还未发现不满足仿射连续性和尺度不变性的单元。

在本节结束之前，讨论一下弱连续性。设 $K_1,K_2\in\mathscr{K}$，且 $K_1\cap K_2$ 是公共 $(n-1)$ 维表面 F，$\forall v\in C^1(K_1\cup K_2)$，若 $\Pi_{\partial K_1}v|_F$ 与 $\Pi_{\partial K_2}v|_F$ 在 F 上的某固定点处相等，则 Σ_K^1 具有弱连续性的 1) 和 2)。这时 $\phi_F(v)$ 等于 v 在该点的值。如果 $\Pi_{\partial K_1}v$ 及 $\Pi_{\partial K_2}v$ 在 F 上的积分平均值相等，则 ϕ_F 就是取 F 上的积分平均值，这时 Σ_K^1 也具有弱连续性的 1)和 2)。

类似地，对 Σ_K^2，如果 $\forall v\in C^2(K_1\cup K_2)$，$\Pi_{\partial K_1}v|_F$ 与 $\Pi_{\partial K_2}v|_F$，$\Pi_{\partial K_1}^s v|_F$ 和 $\Pi_{\partial K_2}^s v|_F$，$\Pi_{\partial K_1}^N v|_F$ 和 $\Pi_{\partial K_2}^N v|_F$ 分别在 F 上的某固定点相等，或者在 F 上的积分平均值相等，那么弱连续性的 1)和 2)成立。

不难看出，第五章给出的所有单元都使弱连续性成立。

§6.3 逼近性

本节讨论 Σ_K^m 满足逼近性条件的验证。由逼近性的定义可知，关键是验证算子 $\Pi_K^0,\Pi_{\partial K}(\Pi_{\partial K}^s,\Pi_{\partial K}^N)$ 对某阶多项式保持不变的性质。下面对第五章第三、四节的例子进行验证。对于协调元和非协调元，总可以取 N_K^β 包括任意高阶多项式的全体，所以不

须验证它们；另外由于 $\Pi_{\partial K}\cdot = \Pi_K^0\cdot|_{\partial K}$($\Pi'_{\partial K}\cdot = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0\cdot|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^N\cdot = \frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0\cdot|_{\partial K}$)，所以取 $r_i = r_1, i = 2,3(4,5)$，只需验证 Π_K^0 对 r_1 次多项式保持不变。

1. SLC1 元。对此单元 $s_1=0$，$r_1=1$。所以当 n,σ 满足 $2>\frac{n}{\sigma}$ 时，逼近性成立。当 $\sigma=2$，$n=1,2,3$ 时逼近性得到保证。$\forall p\in P_1(K)\Pi_K^0 p=p$ 可由 $\Pi_K^0 p(a_i)=p(a_i)$，$i=1,\cdots,n+1$ 及下述定理保证。

定理 6.3.1 定义在单纯形 K 上一次多项式 p 由它在 K 的 $n+1$ 个顶点 a_i 处的值 $p(a_i)$ 唯一确定。

证明 由 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$ 的定义可知 $\lambda_i\in P_1(K)$，而且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}$ 是线性无关的。事实上，若 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}c_i\lambda_i=0$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}c_i\lambda_i(a_j)=c_j=0$，$1\leqslant j\leqslant n+1$。所以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1}$ 是 $P_1(K)$ 的一组基。对 $p\in P_1(K)$，记 p 在这组基下的坐标是 $c_1,\cdots,c_{n+1}$，即 $p=\sum\limits_{i=1}^{n+1}c_i\lambda_i$，则得 $c_i=p(a_i)$，$i=1,\cdots,n+1$。所以 p 由 $p(a_i), 1\leqslant i\leqslant n+1$，唯一确定。

2. SLC2 元。对 SLC2 元 $s_1=0$，$r_1=2$。所以当 $3>\frac{n}{\sigma}$ 时逼近性成立。Π_K^0 对二次多项式保持不变的性质由下述定理保证。

定理 6.3.2 定义在单纯形 K 上的二次多项式 p，由它在 K 的 $n+1$ 个顶点 a_i 处及每边中点 $a_{ij}=\frac{1}{2}(a_i+a_j), 1\leqslant i<j\leqslant n+1$，处的值唯一确定。

证明 $\lambda_i(2\lambda_i-1)$，$i=1,\cdots,n+1$，$\lambda_i\lambda_j$，$1\leqslant i<j\leqslant n+1$ 是 $P_2(K)$ 中线性无关的函数。注意 $P_2(K)$ 的维数是 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$，而这组函数的个数恰好是 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$，所

以它们构成 $P_2(K)$ 的一维基。于是有

$$p=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(2\lambda_i-1)p(a_i)$$

$$+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\lambda_i\lambda_j p(a_{ij}),\ \forall p\in P_2(K). \qquad (6.3.1)$$

由此证得定理 6.3.2.

3. SLC3 元. 对于 SLC3 元，$s_1=0$，$r_1=3$，逼近性成立的条件是 $4>n/\sigma$. 对 Π_K^0 保持三次多项式不变的性质由下述定理保证.

定理 6.3.3 单纯形 K 上任意三次多项式由它在 K 的下述子集 $M_3^{(K)}$ 上的值唯一确定:

$$M_3^{(K)}=\left\{x\,|\,x=\sum_{j=1}^{n+1}\eta_j a_j,\ \sum_{j=1}^{n+1}\eta_j=1,\eta_j\in\left\{0,\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},1\right\},\right.$$

$$\left.1\leqslant j\leqslant n+1\right\}.$$

证明 $P_3(K)$ 的维数是 $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$，而相同数目的三次多项式: $\frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)$, $\frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)$, $i,j=1,\cdots,n+1$, $i\neq j$; $27\lambda_i\lambda_j\lambda_k$, $i<j<k$, 具有这样的性质: 对其中任意一个都有 $M_3^{(K)}$ 中的一个点,在这个点取值为 1, 在其它所有点取值为 0; 而且这些点是互不相同的. 由此可知这些函数是 $P_3(K)$ 的一组基. 且有,

$$p=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)p(a_i)$$

$$+\sum_{i\neq j}\frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)p(a_{iij})$$

$$+\sum_{i<j<k}27\lambda_i\lambda_j\lambda_k p(a_{ijk}),\forall p\in P_3(K). \qquad (6.3.2)$$

4. SLC3′ 元. 对该元，$s_1=0$，$r_1=2$. 逼近性成立的条件是 $3>n/\sigma$. 为了验证 $\Pi_K^0 p=p$, $\forall p\in P_2(K)$，首先给出下述定

理。

定理 6.3.4 对 $1\leqslant i<j<k\leqslant n+1$，$\forall p\in P_3(K)$，令

$$\phi_{ijk}(p)=12p(a_{ijk})+2\sum_{l=i,j,k}p(a_l)$$

$$-3\sum_{\substack{l,m=i,j,k\\l\neq m}}p(a_{llm}). \tag{6.3.3}$$

则对 $P_3'=\{p|p\in P_3(K),\ \phi_{ijk}(p)=0,\ 1\leqslant i<j<k\leqslant n+1\}$ 中任意多项式，可由它在K的顶点 a_i，$1\leqslant i\leqslant n+1$，和 a_{iij}，$1\leqslant i,\ j\leqslant n+1$，$i\neq j$，处的值唯一确定。而且 $P_2(K)\subset P_3'$。

证明 由(6.3.3)式可知 $\phi_{ijk}(1\leqslant i<j<k\leqslant n+1)$ 是数目为 $\binom{n+1}{3}$的线性独立的泛函。所以 P_3' 的维数是 $(n+1)^2$。$\left(P_3(K)\text{ 的维数}-\binom{n+1}{3}\right)$。由(6.3.2)和(6.3.3)式可得，

$$p=\sum_{i=1}^{n+1}\left[\frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)p(a_i)-\frac{9}{2}\lambda_i\sum_{\substack{j<k\\j,k\neq i}}\lambda_j\lambda_k\right]p(a_i)$$

$$+\sum_{i\neq j}\left[\frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)+\frac{27}{4}\lambda_i\lambda_j\sum_{k\neq i,j}\lambda_k\right]p(a_{iij}),$$

$$\forall p\in P_3'. \tag{6.3.4}$$

定理的前半部分得证。

现在证明 $P_2(K)\subset P_3'$。设 $p\in P_2(K)$，记 D^2p 是 p 的所有二阶导数构成的矩阵

$$D^2p=\begin{pmatrix}D^{e_1+e_1}p & D^{e_1+e_2}p\cdots D^{e_1+e_n}p\\ & D^{e_2+e_2}p\cdots D^{e_2+e_n}p\\ & \ddots\quad\vdots\\ \text{对称} & D^{e_n+e_n}p\end{pmatrix}.$$

显然 D^2p 是常数阵，$\forall i,j,k$ 满足 $1\leqslant i<j<k<n+1$，记 $I=\{i,j,k\}$。于是对 $l\in I$，在 a_l 点利用多元 Taylor 展式得

$$p(a_l)=p(a_{ijk})+Dp(a_{ijk})(a_l-a_{ijk})$$

$$+\frac{1}{2}(a_l-a_{ijk})^T D^2 p(a_l-a_{ijk}),\ l\in I.$$

注意 $\sum_{l\in I}(a_l-a_{ijk})=0$，所以

$$\sum_{l\in I}p(a_l)=3p(a_{ijk})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l\in I}(a_l-a_{ijk})^T D^2 p(a_l-a_{ijk}).$$

类似地，当 $l,m\in I,\ l\neq m$ 时，

$$p(a_{ll_m})=p(a_{ijk})+Dp(a_{ijk})(a_{ll_m}-a_{ijk})$$
$$+\frac{1}{2}(a_{ll_m}-a_{ijk})^T D^2 p(a_{ll_m}-a_{ijk}).$$

注意

$$a_{ijk}=\frac{1}{2}(a_{iij}+a_{kki})=\frac{1}{2}(a_{iik}+a_{iik})$$
$$=\frac{1}{2}(a_{kki}+a_{jji}),$$

由上式得

$$\sum_{\substack{l,m\in I\\ l\neq m}}p(a_{ll_m})=6p(a_{ijk})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{l,m\in I\\ l\neq m}}(a_{ll_m}-a_{ijk})^T D^2 p(a_{ll_m}-a_{ijk}).$$

于是

$$12p(a_{ijk})=-2\sum_{l\in I}p(a_l)+3\sum_{\substack{l,m\in I\\ l\neq m}}p(a_{ll_m})$$
$$-\sum_{l\in I}(a_l-a_{ijk})^T D^2 p(a_l-a_{ijk})$$
$$+\frac{3}{2}\sum_{\substack{l,m\in I\\ l\neq m}}(a_{ll_m}-a_{ijk})^T D^2 p(a_{ll_m}-a_{ijk}).$$

因为

$$a_{il_m} - a_{ijk} = \frac{1}{3}(2(a_l - a_{ijk}) + (a_m - a_{ijk})),$$

进而

$$\sum_{l\in I}(a_l - a_{ijk})^T D^2 p(a_l - a_{ijk})$$

$$- \frac{3}{2}\sum_{\substack{l,m\in I\\ l\neq m}}(a_{ll_m} - a_{ijk})^T D^2 p(a_{ll_m} - a_{ijk})$$

$$= -\frac{2}{3}\Big(\sum_{l\in I}(a_l - a_{ijk})\Big)^T D^2 p\Big(\sum_{l\in I}(a_l - a_{ijk})\Big) = 0.$$

所以 $p\in P_3'$. 证毕.

由(6.3.4)和(5.3.15)式可知 Π_K^0 对于二次多项式保持不变.

5. RLCk 元. 对于该元，$s_1 = 0$，$r_1 = k$，逼近性成立的条件是 $k+1 > \frac{n}{\sigma}$. 现在验证 $\forall p\in Q_k(K)$，$\Pi_K^0 p = p$. 特别地当 $p\in P_k(K)$ 时，$\Pi_K^0 p = p$.

定理 6.3.5 $\forall p\in Q_k(K), p$ 由它在 S_k 中各点处的值唯一确定.

证明 只要证明

$$p = \sum_{0\leqslant l_1,\cdots,l_n\leqslant k}\prod_{j=1}^{n}\Big(\sum_{\substack{i_j=0\\ i_j\neq l_j}}^{k}\frac{k\xi_j - i_j}{l_j - i_j}\Big)p\Big(x_1^0 + \frac{l_1 h_1}{k},\cdots,x_n^0 + \frac{l_n h_n}{k}\Big),\ \forall p\in Q_k(K) \tag{6.3.5}$$

成立,就可以得到定理的结论，而且得到 $\forall p\in Q_k(K)$，$\Pi_K^0 p = p$. 事实上，$Q_k(K)$ 的维数是 $(k+1)^n$，而

$$0\leqslant l_1,\cdots,l_n\leqslant k,\ \prod_{j=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{i_j=0\\ i_j\neq l_j}}^{k}\frac{k\xi_j - i_j}{l_j - i_j}\Big) = p_{l_1,\cdots,l_n}$$

是 $Q_k(K)$ 中线性独立的多项式,个数恰为 $(k+1)^n$. 注意

$$p_{l_1,\cdots,l_n}\Big(\frac{l_1}{k},\cdots,\frac{l_n}{k}\Big) = \delta_{l_1 l_1}\cdots\delta_{l_n l_n}$$

$$-\prod_{j=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{i_j=0\\ i_j\neq l_j}}^{k}\frac{(l_j-i_j)}{l_j-i_j}\Big)$$

就可以得到(6.3.5)式。

6. RLC2′ 元。$s_1=0$，$r_1=2$。逼近性成立的条件是 $3>\frac{2}{\sigma}$.

令 $a_1,\cdots,a_9$ 是图 5.3.7 所定义的点。记

$$Q_2'(K)=\{p\in Q_2\,|\,4p(a_9)+\sum_{i=1}^{4}p(a_i)$$

$$-2\sum_{i=5}^{8}p(a_i)=0\}.$$

定理 6.3.6 空间 $Q_2'(K)$ 中的元素 p 由它在 $a_i(1\leqslant i\leqslant 8)$ 处的值唯一确定，且 $P_2(K)\subset Q_2'(K)$.

证明 由(5.3.19)式及

$$4p(a_9)+\sum_{i=1}^{4}p(a_i)-2\sum_{i=5}^{8}p(a_i)=0$$

得到

$$p=\sum_{i=1}^{8}p(a_i)p_i,\quad\forall p\in Q_2',\tag{6.3.6}$$

其中 p_i 由(5.3.18)式确定。只剩下证 $P_2(K)\subset Q_2'(K)$，令 $p\in P_2(K)$，记 D^2p 是 p 的二阶导数阵。由 Taylor 展式得

$$p(a_i)=p(a_9)+Dp(a_9)(a_i-a_9)$$

$$+\frac{1}{2}D^2p(a_i-a_9)^2,\quad 1\leqslant i\leqslant 8.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{4}(a_i-a_9)=\sum_{i=5}^{8}(a_i-a_9)=0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{4}p(a_i)=4p(a_9)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}D^2p(a_i-a_9)^2,$$

$$\sum_{i=5}^{8} p(a_i) = 4p(a_9) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} D^2p(a_i - a_9)^2.$$

注意 D^2p 是双线性的，$a_5 = (a_1 + a_2)/2, \cdots$，可得

$$\sum_{i=5}^{8} D^2p(a_i - a_9)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} D^2p(a_i - a_9)^2.$$

综合上述各式得

$$4a(a_9) + \sum_{i=1}^{4} p(a_i) - 2\sum_{i=5}^{8} p(a_i) = 0.$$

即 $p \in Q_2'(K)$. 证毕.

由(6.3.6)及(5.3.19)式可知 $\Pi_K^0 p = p$, $\forall p \in P_2(K)$.

7. SHC3 元. 对于 SHC3 元，$s_1 = 1$，$r_1 = 3$. 逼近性成立的条件是 $3 > n/\sigma$. 记 K 是单纯形，a_i 是 K 的顶点，

$$a_{ijk} = \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k),\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant n + 1.$$

定理 6.3.7 $\forall p \in P_3(K)$，p 由它在 a_i 点的函数值，一阶导数值及 a_{ijk} 点处的函数值唯一确定.

证明 只须证明

$$\begin{aligned} p = \sum_i \Big(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_i \sum_{\substack{j<k \\ j\neq i,\, k\neq i}} \lambda_j\lambda_k\Big)p(a_i) \\ + 27\sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k p(a_{ijk}) \\ + \sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j(2\lambda_i + \lambda_j - 1)D(a_i)(a_j - a_i), \\ \forall p \in P_3(K). \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

成立. 记上式右端的多项式为 $\tilde{p}$. 不难验证 $\tilde{p}(a_i) = p(a_i)$, $\tilde{p}(a_{ijk}) = p(a_{ijk})$，对 $\tilde{p}$ 求导数，然后取 a_i 的值可得

$$D\tilde{p}(a_i) = \sum_{j\neq i} \{Dp(a_i)(a_j - a_i)\}D\lambda_j.$$

要证明 $D\tilde{p}(a_i) = Dp(a_i)$ 等价于要证明

$$D\tilde{p}(a_i)(a_k - a_i) = Dp(a_i)(a_k - a_i),$$

$$1 \leqslant k \leqslant n+1, \ k \neq i.$$

上式是下述关系式的推论

$$D\lambda_j(a_k - a_i) = \delta_{jk} - \lambda_j(a_i),$$
$$1 \leqslant k \leqslant n+1, \ k \neq i. \qquad (6.3.8)$$

记A是由方程 (5.2.21) 所决定的系数阵，记 $A^{-1} = (a^{ij})$，则由(5.2.22)可以 $D\lambda_j = (a^{j1}, \cdots, a^{jn})^T$，$1 \leqslant j \leqslant n+1$。因而对

$$\forall x \in R^n, \ D\lambda_j(a_k - x) = \sum_{i=1}^{n} a^{ji} a_{ik} - \sum_{i=1}^{n} a^{ji} x_i = \delta_{jk} - \lambda_j(x).$$

进而(6.3.8)成立.证明了 $\tilde{p}$ 有上述性质就可推断 $p = \tilde{p}$。证毕。

由(6.3.7)和(5.3.21)式可知，$\forall p \in P_3(K), \Pi_K^0 p = p$。

8. Zienkiewicz 元。$s_1 = 1$，$r_1 = 2$，逼近性成立的条件是 $\sigma > 1$。对三角形 K，a_1, a_2, a_3 是K的顶点，a_{123} 是K的形心，$\forall p \in P_3(K)$，定义

$$\phi_{123}(p) = 6p(a_{123}) - 2\sum_{i=1}^{3} p(a_i) + \sum_{i=1}^{3} Dp(a_i)(a_i - a_{123}). \qquad (6.3.9)$$

记 $P_3''(K) = \{p \mid p \in P_3(K), \ \phi_{123}(p) = 0\}$。

定理 6.3.8 $P_3''(K)$ 中的任意多项式，由它在 $a_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 点处的函数值和所有一阶导数值唯一确定，且 $P_2(K) \subset P_3''$。

证明 利用等式

$$p = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i^2(3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3) p(a_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant 3 \\ i \neq j}} \frac{1}{2}\lambda_i\lambda_j(1 + \lambda_i - \lambda_j) Dp(a_i)(a_j - a_i),$$
$$\forall p \in P_3'', \qquad (6.3.10)$$

可得定理的前半段。(6.3.10)式的证明方法与定理 6.3.7 的方法相

同. 现在考虑 $P_2(K)\subset P_3''(K)$. $\forall p\in P_2(K)$, 有

$$p(a_i)=p(a_{123})+Dp(a_{123})(a_i-a_{123})$$
$$+\frac{1}{2}D^2p(a_i-a_{123})^2,\ 1\leqslant i\leqslant 3,$$
$$Dp(a_i)=Dp(a_{123})+D^2p(a_i-a_{123}),\ 1\leqslant i\leqslant 3.$$

注意

$$\sum_{i=1}^{3}(a_i-a_{123})=0,$$

得

$$2\sum_{i=1}^{3}p(a_i)=6p(a_{123})+\sum_{i=1}^{3}D^2p(a_i-a_{123})^2,$$
$$\sum_{i=1}^{3}Dp(a_i)(a_i-a_{123})=\sum_{i=1}^{3}D^2p(a_i-a_{123})^2.$$

将上两式相减得

$$2\sum_{i=1}^{3}p(a_i)-\sum_{i=1}^{3}Dp(a_i)(a_i-a_{123})=6p(a_{123}),$$

即 $p\in P_3''(K)$.

由 $P_2(K)\subset P_3''(K)$, (6.3.10)及(5.3.22)式可知, $\forall p\in P_2(K)$, $\Pi_K^0p=p$.

9. SLN1 元和 Wilson 元. 对于这两个单元有 $s_1=0, r=1$, 逼近性成立的条件是 $\sigma>1$. 对于 SLN1 元请读者验证: $\forall p\in P_1(K), \Pi_K^0p=p$. 对 Wilson 元, 由 Π_K^0 的构造可知, $\forall p\in Q_1(K)$, $\Pi_K^0p\in Q_1(K)$. 且

$$\Pi_K^0p=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi_1^i\xi_1)(1+\xi_2^i\xi_2)p(a_i),$$
$$(\Pi_K^0p)(a_i)=p(a_i).$$

由定理 6.3.5 可知, $\Pi_K^0p=p$.

10. RQC4 元. 此元 $s_1=0$, $r_1=r_2=r_3=1$, 逼近性条件是 $\sigma>1$. 现在验证 $\forall p\in P_1(K)$, $\Pi_K^0p=p$, $\Pi_{\partial K}p=p|_{\partial K}$. 对于 $i=1,2,3,4$, 记 $\Pi_K^ip\in P_1(K)$, 且 Π_K^ip 在点 a_i,a_{i+1},a_{i-1} 处

与 p 相等，由定理 6.3.1 可知：$\Pi_K^i p = p$. 由于 $\Pi_{\partial K} p|_{F_i} = \Pi_K^i p|_{F_i}$，所以 $\Pi_{\partial K} p = p|_{\partial K}$. 显然

$$\Pi_K^0 p = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\Pi_K^i p$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(\xi_1^{i^2} - \xi_2^{i^2})(\xi_1\xi_1 - \xi_2\xi_2)p(a_i), \quad (6.3.11)$$

现在证明上式的第二个和号对 $p \in P_1(K)$ 为 0. 记 K 的形心是 a_K，则对 $i = 1,2$，

$$p(a_i) = p(a_K) + Dp(a_K)(a_i - a_K),$$

$$p(a_{i+2}) = p(a_K) + Dp(a_K)(a_{i+2} - a_K),$$

注意

$$a_i - a_K = -(a_{i+2} - a_K),$$

$$\sum_{i=1}^{4}(\xi_1^{i^2} - \xi_2^{i^2}) = 0,$$

$$(\xi_1^i)^2 - (\xi_2^i)^2 = (\xi_1^{i+2})^2 - (\xi_2^{i+2})^2,$$

所以

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(\xi_1^{i^2} - \xi_2^{i^2})(\xi_1\xi_1 - \xi_2\xi_2)p(a_i) = 0.$$

再由 $\Pi_K^i p = p$，得 $\Pi_K^0 p = p$.

11. TQC6 元. 此元 $s_2 = 1$，$r_1 = 2$，逼近性成立的条件是 $\sigma > 1$. 为验证 $\Pi_K^0 p = p$，$\forall p \in P_2(K)$，需要下述结论.

定理 6.3.9 定义在三角形 K 上的二次多项式，由它在 K 的顶点处的函数值和各边中点的法向导数值唯一确定.

证明 采用第五章第四节的记号，$\forall p \in P_2(K)$，我们将证明

$$p = \sum_{i=1}^{3} p_i p(a_i) + \sum_{i=1}^{3} q_i \frac{\partial p}{\partial N}(a_{i+3}). \quad (6.3.12)$$

首先，显然有

$$q_i(a_j) = 0, \quad i,j = 1,2,3. \quad (6.3.13)$$

其次有

$$\frac{\partial}{\partial N} q_i|_{l_j} = -2|K| l_j^{-1}(1-2\lambda_i)\left.\frac{\partial \lambda_i}{\partial N}\right|_{l_j},\quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3.$$

注意 l_j 边中点的坐标是

$$\lambda_j = 0,\ \lambda_i = \frac{1}{2},\ i \neq j,$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial N} q_i(a_{j+3}) = 0,\quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3. \tag{6.3.14}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial N} q_1(a_4) = -2|K| l_1^{-1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial N}(a_4),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_1}{\partial N}(a_4) &= D\lambda_1 \cdot N \\ &= \frac{1}{2|K|}(b_1,c_1)(b_1,c_1)^T/l_1 \\ &= -l_1/2|K|,\end{aligned}$$

所以，

$$\frac{\partial}{\partial N} q_1(a_4) = 1.$$

类似地可知

$$\frac{\partial}{\partial N} q_i(a_{i+3}) = 1,\quad i = 1,2,3. \tag{6.3.15}$$

对于 p_i，有

$$\frac{\partial}{\partial N} p_i(a_{j+3}) = 0,\quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3. \tag{6.3.16}$$

以 p_1 为例证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N} p_1(a_{j+3}) = {}& 2\lambda_1 D\lambda_1 \cdot (N|_{l_j})(a_{j+3}) \\ & + \alpha_2 Dq_2(a_{j+3}) \cdot (N|_{l_j}) + \alpha_3 Dq_3(a_{j+3}) \cdot (N|_{l_j}).\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial N} p_1(a_4) = 0.$$

而

$$\frac{\partial}{\partial N} p_1(a_5) = D\lambda_1 \cdot (N|_{l_2}) + \alpha_2 Dq_2(a_5) \cdot (N|_{l_2})$$

$$= -D\lambda_1 \cdot (b_2, c_2)/l_2 + (b_1 b_2 + c_1 c_2)/(2|K|l_2),$$

$$D\lambda_1 = \frac{1}{2|K|}(b_1, c_1),$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial N} p_1(a_5) = 0.$$

类似可证

$$\frac{\partial}{\partial N} p_1(a_6) = 0.$$

由(6.3.13)—(6.3.16)式及 $p_i(a_j) = \delta_{ij}$，$1 \leqslant i, j \leqslant 3$，可得(6.3.12)式为真。定理得证。

由(6.3.12)和(5.4.8)式可知 $\Pi_K^0 p = p$，$\forall p \in P_1(K)$。

12. TQC9 元。此元 $s_2 = 1$，$r_1 = r_2 = r_3 = 2, r_4 = 2$，$r_5 = 3$，逼近性是 $\sigma > 1$。由定理6.3.8和(5.4.9)式可知，$\forall p \in P_2(K)$，$\Pi_K^0 p = p$。进而

$$\Pi_{\partial K} p = p|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^s p = \frac{\partial}{\partial s} p|_{\partial K}.$$

若 $p \in P_2(K)$，则 $\frac{\partial p}{\partial N}$ 在 l_i 上是一次多项式。由于 $\left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_{l_i}$ 和 $\Pi_{\partial K}^N p|_{l_i}$ 在 l_i 的两端点处相等，由定理 6.3.1 得

$$\Pi_{\partial K}^N p|_{l_i} = \left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_{l_i}.$$

13. TQC12 元。这一单元有 $s_2 = 1, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 3$，逼近性成立的条件是 $\sigma > \frac{2}{3}$。$\forall p \in P_3(K)$，$\left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_{l_i}$ 是二次多项式，$\Pi_{\partial K}^N p|_{l_i}$ 也是二次多项式，且在 l_i 的两端点及中点相等，由定理 6.2.2（$n = 1$）可得

$$\Pi_{\partial K}^{N} p = \frac{\partial}{\partial N} p|_{\partial K}.$$

要验证 $\Pi_K^0 p = p$, $\Pi_{\partial K} p = p|_{\partial K}$, $\Pi_{\partial K}^{s} p = \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\partial K}$,需要下述定理.

定理 6.3.10 $P_3(K)$ 的多项式由它在K的三个顶点处的函数值和两个一阶导数值及K的某一个边中点的法向导数值唯一确定.

证明 我们取 a_6 点的法向导数值为例考虑. $\forall p \in P_3(K)$, 有

$$\begin{aligned}
p = &\left[\lambda_1^2(3 - 2\lambda_1) - 6\frac{b_1b_3 + c_1c_3}{l_3^2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right]p(a_1) \\
&+ \left[\lambda_2^2(3 - 2\lambda_2) - 6\frac{b_2b_3 + c_2c_3}{l_3^2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right]p(a_2) \\
&+ \lambda_3^2(3 - \lambda_3)p(a_3) + \left[\lambda_1^2\lambda_2 - \left(2\frac{b_1b_3 + c_1c_3}{l_3^2}\right.\right. \\
&\left.\left.+ \frac{b_2b_3 + c_2c_3}{l_3^2}\right)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right]Dp(a_1)(a_2 - a_1) \\
&+ (\lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)Dp(a_1)(a_3 - a_1) + (\lambda_2^2\lambda_3 \\
&- \lambda_1\lambda_2\lambda_3)Dp(a_2)(a_3 - a_2) \\
&+ \left[\lambda_2^2\lambda_1 - \left(\frac{b_1b_3 + c_1c_3}{l_3^2} + 2\frac{b_2b_3 + c_2c_3}{l_3^2}\right)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right] \\
&\cdot Dp(a_2)(a_1 - a_2) + \lambda_3^2\lambda_1 Dp(a_3)(a_1 - a_3) \\
&+ \lambda_3^2\lambda_2 Dp(a_3)(a_2 - a_3) - \frac{8|K|}{l_3} \\
&\cdot \lambda_1\lambda_2\lambda_3\frac{\partial}{\partial N}p(a_6).
\end{aligned} \tag{6.3.17}$$

为了验证上式,只需证明上式右端的三次多项式 $\tilde{p}$ 满足 $\tilde{p}(a_i) = p(a_i)$, $D\tilde{p}(a_i) = Dp(a_i)$,

$$\frac{\partial}{\partial N}\tilde{p}(a_6) = \frac{\partial}{\partial N}p(a_6).$$

具体过程由读者补上. 证毕.

由于 Π_K^0 是三个分别取 l_1, l_2 和 l_3 边中点的法向导数和其

余节点参数插值多项式之和的三分之一，由定理 6.3.10 可知：

$$\Pi_K^0 p = p, \forall p \in P_3(K).$$

14. TQC15 元。此元的 $s_2 = 1, r_1 = r_2 = r_3 = r_5 = 4, r_4 = 3$，逼近性成立的条件是 $\sigma > \frac{2}{3}$。由 TQC12 元的讨论可知，

$$\forall p \in P_3(K),\ \Pi_{\partial K}^N p = \left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_{\partial K}.$$

下面验证 $\forall p \in P_4(K)$，$\Pi_K^0 p = p$。事实上，$\forall p \in P_4(K)$，有

$$\begin{aligned} p = \sum_{i=1}^{3} \Big[& \lambda_i^2(2\lambda_i - 1)(5 - 4\lambda_i) \\ & + 2\sum_{j \neq i} \frac{1}{l_i}(b_i b_j + c_i c_j)(2\lambda_i - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Big] p(a_i) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} 16 \Big[\lambda_i^2 \lambda^2 \\ & + \sum_{k \neq i,j} \frac{1}{l_k} (b_i b_k + c_i c_k + b_j b_k + c_j c_k)(2\lambda_k \\ & - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Big] p(a_{ij}) + \sum_{i \neq j} \Big[\lambda_i^2(2\lambda_i - 1)\lambda_j \\ & + 2\sum_{k \neq i,j} \frac{1}{l_k}(b_i b_k + c_i c_k)(2\lambda_k - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Big] \\ & \cdot Dp(a_i)(a_j - a_i) \\ & + 8\sum_{i=1}^{3} \frac{|K|}{l_i}(2\lambda_i - 1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \frac{\partial p}{\partial N}(a_{i+3}). \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

其中

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j).$$

(6.3.18) 式的证明留给读者。通过 (6.3.18) 式和 (5.4.12) 式可得 $\Pi_K^0 p = p$。

15. Argyris 元。$s_2 = 2, r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 5$，逼近性成立的条件是 $\sigma > \frac{1}{2}$。对于这一单元有下述定理。

定理 6.3.11 $P_5(K)$ 中的任意多项式由它在三角形 K 的顶点处的函数值，所有一阶和二阶导数值及各边中点的法向导数值唯一确定。

证明 要证明定理的结论，只须证明当 $p\in P_5(K)$，且 $D^\beta p(a_i)=0, |\beta|\leqslant 2, 1\leqslant i\leqslant 3, \frac{\partial p}{\partial N}(a_j)=0, j=4,5,6$ 时，$p=0$。

令 t 是包含边 $F=[a_1,a_2]$ 的坐标轴的横坐标。则 $p|_F$ 是 t 的函数 q，q 是五次多项式且满足

$$q(a_1)=q'(a_1)=q''(a_1)=q(a_2)=q'(a_2)=q''(a_2)=0.$$

这是因为，若 s 是含边 F 的轴上的单位向量，则

$$q'(a_1)=\frac{\partial p}{\partial s}(a_1), q''(a_1)=\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}(a_1),\cdots,$$

所以 $q=0$。

类似地，$\left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_F$ 是 t 的函数 γ，γ 是四次多项式。由于

$$\gamma(a_1)=\frac{\partial p}{\partial N}(a_1),\ \gamma'(a_1)=\frac{\partial}{\partial s}\ \frac{\partial}{\partial N}p(a_1),$$

$$\gamma(a_6)=\frac{\partial p}{\partial N}(a_6),\cdots,$$

所以 $\gamma(a_1)=\gamma'(a_1)=\gamma(a_6)=\gamma(a_2)=\gamma'(a_2)=0$。进而 $\gamma=0$。

因为 $\frac{\partial}{\partial N}p|_F=0$，已经证得 p 和 Dp 在 F 上恒为 0。这说明 λ_3^2 是 p 的因子。对其它边进行类似的步骤，可得 $\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$ 是 p 的因子，λ_i 是一次多项式且不可能是常数，所以 p 一定是 0。

由定理 6.3.11 可知 $\Pi_K^0 p=p, \forall p\in P_5(K)$。

16. Bell 元。此元 $s_2=2, r_i=4, 1\leqslant i\leqslant 5$，逼近性条件是 $\sigma>\frac{2}{3}$。对三角形 K 记 $P_5'(K)=\{p|p\in P_5(K)$，且 $\frac{\partial}{\partial N}\ p|_F\in P_3(F)$，$F$ 是 K 的任意边$\}$。

定理 6.3.12 $P_5'(K)$ 中的多项式由它在 K 的三个顶点处的函

数值，所有的一阶和二阶导数值唯一确定，而且 $P_4(K)\subset P_5'(K)$。

证明 $P_4(K)\subset P_5'(K)$ 是显然的。令 $F=[a_i,a_j]$ 是 R^2 中的线段，以 a_{ij} 为中点。令 v 是满足 $v|_F\in P_4(F)$ 的函数，于是 $v|_F\in P_3(F)$ 当且仅当

$$\chi_{ij}(v)=4(v(a_i)+v(a_j))-8v(a_{ij})+Dv(a_i)(a_j-a_i)\\+Dv(a_j)(a_i-a_j)=0. \tag{6.3.19}$$

为证明这一点，令 $x\in F$，$\alpha_4=D^4v(x)s^4$，s 是沿着 F 的单位向量，α_4 是常数，于是

$$v(a_i)=v(a_{ij})+Dv(a_{ij})(a_i-a_{ij})\\+\frac{1}{2}D^2v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^2\\+\frac{1}{6}D^3v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^3\\+\frac{\alpha_4}{24}\|a_i-a_{ij}\|^4,$$

$$v(a_j)=v(a_{ij})+Dv(a_{ij})(a_j-a_{ij})\\+\frac{1}{2}D^2v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^2\\+\frac{1}{6}D^3v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^3\\+\frac{\alpha_4}{24}\|a_j-a_{ij}\|^4.$$

由 $a_i-a_{ij}=-(a_j-a_{ij})$ 及上两式可得

$$v(a_i)+v(a_j)=2v(a_{ij})\\+\frac{1}{2}\{D^2v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^2+D^2v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^2\}\\+\frac{\alpha_4}{24}\{\|a_i-a_{ij}\|^4+\|a_j-a_{ij}\|^4\}.$$

类似地

$$Dv(a_i)(a_i-a_{ij})=Dv(a_{ij})(a_i-a_{ij})+D^2v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^2$$

$$+\frac{1}{2}D^3v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^3+\frac{\alpha_4}{6}\|a_i-a_{ij}\|^4,$$

$$Dv(a_j)(a_j-a_{ij})=Dv(a_{ij})(a_j-a_{ij})+D^2v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^2$$

$$+\frac{1}{2}D^3v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^3+\frac{\alpha_4}{6}\|a_j-a_{ij}\|^4,$$

$$D^2v(a_{ij})(a_i-a_{ij})^2+D^2v(a_{ij})(a_j-a_{ij})^2=Dv(a_i)(a_i-a_{ij})$$

$$+Dv(a_j)(a_j-a_{ij})-\frac{\alpha_4}{6}(\|a_i-a_{ij}\|^4+\|a_j-a_{ij}\|^4).$$

所以得

$$2v(a_{ij})=v(a_i)+v(a_j)+\frac{1}{4}\{Dv(a_i)(a_j-a_i)$$

$$+Dv(a_j)(a_i-a_j)\}+\frac{\alpha_4}{96}\|a_i-a_j\|^4.$$

这样就得到了所需结论。证毕。

由定理 6.3.12 可知，$\Pi_K^0 p=p,\forall p\in P_5'(K)$。

17. RQC8 元。该元 $s_2=1,r_1=r_2=r_3=r_4=r_5=2$，逼近性条件是 $\sigma>1$.要验证 $\forall\ p\in P_2(K),\Pi_K^0 p=p,\ \Pi_{\partial K}p=p|_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^t p=\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{\partial K},\Pi_{\partial K}^N p=\left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_{\partial K}$，只须验证下述等式（参见图 5.4.6）:

$$p=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi_1^i\xi_1)(1+\xi_2^i\xi_2)p(a_i)$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_1\xi_1-1)\frac{\partial p}{\partial N}(b_1)$$

$$+\frac{1}{2}(\xi_2\xi_2-1)\frac{\partial p}{\partial N}(b_2),\quad\forall p\in P_2(K).\qquad(6.3.20)$$

上面用的点是 b_1,b_2，其它情形也相似的等式。

18. Adini 元和 RQC12 元。对于 Adini 元，$s_2=1$，$r_i=3$，$1\leqslant i\leqslant 5$，且逼近性条件是 $\sigma>\frac{2}{3}$。对于 RQC12 元，$s_2=1$，$r_1=r_2=r_3=r_5=3,r_4=2$，逼近性条件是 $\sigma>1$。两个元，除

了 $\Pi_{\partial K}^N$ 不同，其它均相同. 不难验证，由(5.4.18)定义的 $p_i, p_{i,j} \in P' = \mathrm{span}\{P_3(K), x_1x_2^3, x_1^3x_2\}$，而且是线性无关的. 所以 $\forall p \in P'$，$\Pi_K^0 p = p$. 对于 RQC12 元，当 $p \in P_2(K)$ 时，在K的某边 F 上，$\left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_F$ 是一次多项式，而 $\Pi_{\partial K}^N p|_F \in P_1(F)$ 且在 F 的两端点与其相同，故 $\Pi_{\partial K}^N p|_F = \left.\frac{\partial p}{\partial N}\right|_F$.

19. Bogner-Fox-Schmidt 元. 此元 $s_2 = 2, r_i = 3, 1 \leqslant i \leqslant 5$，逼近性条件是 $\sigma > 1$. 要证明 $\forall p \in Q_3(K), \Pi_K^0 p = p$，只须证明：若 $p(a_i) = D^{e_1}p(a_i) = D^{e_2}p(a_i) = D^{(1,1)}p(a_i) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 4$，则 $p \equiv 0$.

记

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{3} c_{ij} x_1^i x_2^j.$$

不妨设 $K = [0,1] \times [0,1]$. 于是

$$p(0, x_2) = \sum_{j=0}^{3} c_{0j} x_2^j$$

满足

$$p(0,0) = p(0,1) = D^{e_2}p(0,0) = D^{e_2}p(0,1) = 0,$$

所以由定理 6.3.7 ($n = 1$) 得 $p(0, x_2) \equiv 0$；而

$$p(1, x_2) = \sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{i=0}^{3} c_{ij}\right) x_2^j$$

满足

$$p(1,0) = p(1,1) = D^{e_2}p(1,0) = D^{e_2}p(1,1) = 0,$$

所以 $p(1, x_2) \equiv 0$. 即

$$c_{0j} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} c_{ij} = 0, 0 \leqslant j \leqslant 3. \tag{6.3.21}$$

类似地可得

$$c_{j0} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} c_{ji} = 0, 0 \leqslant j \leqslant 3. \tag{6.3.22}$$

注意

$$D^{e_1}p(0,x_2)=\sum_{j=0}^{3}c_{1j}x_2^j$$

满足

$$D^{e_1}p(0,0)=D^{e_1}(0,1)=D^{(1,1)}p(0,0)=D^{(1,1)}p(0,1)=0,$$

所以,$D^{e_1}p(0,x_2)\equiv 0$; 对于

$$D^{e_1}p(1,x_2)=\sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}ic_{ij}\right)x_2^j$$

也可得 $D^{e_1}p(1,x_2)\equiv 0$. 即

$$c_{1j}=0,\ \sum_{i=2}^{3}ic_{ij}=0,0\leqslant j\leqslant 3. \tag{6.3.23}$$

类似地有

$$c_{j1}=0,\ \sum_{i=2}^{3}ic_{ji}=0,0\leqslant j\leqslant 3. \tag{6.3.24}$$

由(6.3.21)—(6.3.24)可推得 $c_{ij}=0,0\leqslant i,j\leqslant 3$. 即 $p\equiv 0$.

到此为止,我们已验证了第五章所有例子的逼近性,将逼近性的条件化成了 n, σ 的要求,当 $n\leqslant 3$, $\sigma=2$ 时, Σ_K^m 都具有逼近性.

§6.4 单元秩条件

单元秩条件的验证,就是计算矩阵Q_K^m 的秩. 计算一个矩阵或若干个矩阵的秩是不难的,问题是要验证无穷多个矩阵的秩.所以要找出一些容易验证的条件,例如把无穷多个矩阵秩的检验化成一个矩阵秩的检验.

首先,对于用一套函数构造的协调元或非协调元,Σ_K^m 满足单元秩条件.

定理 6.4.1 下述两个结论成立: (1) 对于 Σ_K^1 若 $\forall K\in\mathscr{K}$, $\forall v\in C^{s_1}(K)$, $\Pi_{\partial K}v=\Pi_K^0 v|_{\partial K}$, $D^{e_i}\Pi_K^0 v\in N_K^{c_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, 且 $\forall p\in P_0(K),\Pi_0^K p=p$, 则单元秩条元成立. (2)对于 Σ_K^2,若 $\forall K\in$

$\mathscr{K}$, $\Pi_{\partial K}v = \Pi_K^0 v|_{\partial K}$,

$$\Pi_{\partial K}^1 v = \frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 v|_{\partial K},$$

$$\Pi_{\partial K}^N v = \frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0 v|_{\partial K},$$

$D^\beta \Pi_K^0 v \in N_K^\beta$, $|\beta| > 0$, 对 $\forall v \in C^{s_1}(K)$ 成立，且对 $\forall p \in P_1(K)$, $\Pi_K^0 p = p$, 则单元秩条件成立。

证明 考虑方程 $\phi \in R^{M_1}$,

$$Q_K^1 \phi = 0. \tag{6.4.1}$$

设 ϕ 是(6.4.1)的解。由于 $\phi_{1,K},\cdots,\phi_{M_1,K}$ 是 $C^{s_1}(K)$ 上的线性独立的线性泛函，所以存在 $v \in C^{s_1}(K)$ 使得 $\phi = \phi_K^1(v)$. 于是 $Q_K^1 \phi_K^1(v) = 0$, 进而 $\zeta_K^1(v) = 0$. 由 1) 的假设，$D^{e_i}\Pi_K^0 v = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 所以 $\Pi_K^0 v$ 是一常数 α. 而 $\Pi_K^0 1 = 1$, 所以 $\Pi_K^0 v = \alpha \Pi_K^0 1$, $\phi_K^1(v) = \alpha\phi_K^1(1)$, 即 $\phi = \alpha\phi_K^1(1)$. 又 $\phi_K^1(1) \neq 0$, 所以 Q_K^1 的秩是 $M_1 - 1$. 结论(1)成立。类似地可证结论(2). 证毕.

定理 6.4.1 对 Σ_K^m 的假设是要求 $\Pi_K^\beta v = D^\beta \Pi_K^0 v$, $|\beta| \leqslant m$, 且 Π_K^0 保持 $m-1$ 次多项式不变. 由第五章的三、四节和本章第三节可知，SLCk 元，SLC3′ 元，RLCk 元，RLC2′ 元，SHC3元，Zienkiewicz 元，SLN1 元，Wilson 元，TQC6 元，Bell 元，Argyris 元，B-F-S 元和 Adini 元等都满足单元秩条件。对于用一套函数构造的单元，秩条件自然满足，因而不须验证。当单元不是用一套函数构造时，秩条件是需要验证的。对于仿射族的单元，验证工作只须在单元 $\hat{K}$ 上进行。

定理 6.4.2 设 $m = 1$ 或 2, Σ_K^m 是仿射族。如果对 $\forall p \in P_{m-1}(\hat{K})$, $\Pi_K^0 p = p$, $\Pi_{\partial K} p = p|_{\partial K}$ $\left(\Pi_{\partial K}^1 p = \frac{\partial}{\partial s} p|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^N p = \frac{\partial}{\partial N} p|_{\partial K}\right)$,

且

$$P_0(\hat{K}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} N_K^{e_i},$$

则由 Q_K^m 的秩是

$$M_m - \frac{1}{2}m(m+1),$$

可得 Σ_K^* 满足单元秩条件。

证明 首先考虑 $m=1$ 的情形. 对 $\forall K \in \mathscr{K}, v \in C^{s_1}(K)$, 在(5.3.5)式作坐标变换 $x = B_K\hat{x} + b_K$, 利用 $\widehat{\Pi_K^0 v} = \Pi_{\hat{K}}^0\hat{v}$, $\widehat{\Pi_{\partial K}v} = \Pi_{\partial\hat{K}}\hat{v}$ 及(5.2.10)和(5.2.14)—(5.2.15)式可得

$$\int_{\hat{K}} \hat{p}\widehat{\Pi_K^{c_i} v}|\det B_K|d\hat{x} = \int_{\partial\hat{K}} \hat{p}\Pi_{\partial\hat{K}}\hat{v}(B_K^{-T}\hat{N})_i|\det B_K|d\hat{s}$$

$$-\int_{\hat{K}} (B_K^{-T}D_{\hat{x}}\hat{p})_i\Pi_{\hat{K}}^0\hat{v}|\det B_K|d\hat{x},\ \forall \hat{p} \in N_{\hat{K}}^1,$$

其中利用了导数链法则: $D_x p = B_K^{-T}D_{\hat{x}}\hat{p}$. 记 $B_K^{-T} = (b^{lk})$, 则从上式得

$$\int_{\hat{K}} \hat{p}\widehat{\Pi_K^{c_i} v}d\hat{x} = \sum_{j=1}^n b^{ij}\left\{\int_{\partial\hat{K}} \hat{p}\Pi_{\partial\hat{K}}\hat{v}\hat{N}_j d\hat{s}\right.$$

$$\left.-\int_{\hat{K}} D_{\hat{x}}^{c_j}\hat{p}\Pi_{\hat{K}}^0\hat{v}d\hat{x}\right\},\ \forall \hat{p} \in N_{\hat{K}}^1.$$

在(5.3.5)式中取 K 为 $\hat{K}$, 则有

$$\int_{\hat{K}} \hat{p}\widehat{\Pi_K^{c_i} v}d\hat{x} = \sum_{j=1}^n b^{ij}\int_{\hat{K}} \hat{p}\Pi_{\hat{K}}^{c_j}\hat{v}d\hat{x},\ \forall \hat{p} \in N_{\hat{K}}^1.$$

所以得到

$$\begin{pmatrix} \widehat{\Pi_K^{c_1} v} \\ \vdots \\ \widehat{\Pi_K^{c_n} v} \end{pmatrix} = B_K^{-T}\begin{pmatrix} \Pi_{\hat{K}}^{c_1}\hat{v} \\ \vdots \\ \Pi_{\hat{K}}^{c_n}\hat{v} \end{pmatrix}. \tag{6.4.2}$$

如果 $\phi_K^1(v) \in R^{M_1}$ 满足 $Q_K^1\phi_K^1(v) = 0$, 则 $\zeta_K^1(v) = 0$,即 $\Pi_K^{c_i}v = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 由(6.4.2)可知, $\Pi_{\hat{K}}^{c_i}\hat{v} = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 由 $Q_{\hat{K}}^1$ 的秩是 $M_1 - 1, \phi_{\hat{K}}^1(1) \neq 0$ 且 $Q_{\hat{K}}^1\phi_{\hat{K}}^1(1) = 0$,推出 $\phi_{\hat{K}}^1(\hat{v}) = \alpha\phi_{\hat{K}}^1(1)$, 所以 $\Pi_{\hat{K}}^0\hat{v} = \alpha, \Pi_{\partial\hat{K}}\hat{v} = \alpha$. 利用仿射族的性质, $\Pi_K^0 v = \alpha$, $\Pi_{\partial K}v = \alpha$, 即 $\phi_K^1(v) = \alpha\phi_K^1(1)$. 注意到 $\phi_K^1(1) \neq 0$, $\phi_K^1(1)$ 满足 $Q_K^1\phi_K^1(1) = 0$, 所以 Q_K^1 的秩是 $M_1 - 1$. 定理对 $m = 1$ 成立。

对 $m = 2$, 有下述关系式:

$$l,k=1,2, \widehat{\Pi_K^{(1+e_k)}v} = \sum_{i,j=1}^{l} b^{li} b^{kj} \Pi_{\hat{K}}^{e_i+e_j} \hat{v}. \tag{6.4.3}$$

$\forall v \in C^{s_2}(K)$, $K \in \mathscr{K}$ 成立．现在来证明它．在(5.4.1)式中，作坐标变量代换 $x = B_K \hat{x} + b_K$，利用仿射族的假设，(5.2.10)及(5.2.14)—(5.2.15)式和导数链法则可得，

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{K}} \hat{p} \widehat{\Pi_K^{(2,0)} v} |\det B_K| d\hat{x} \\
&= \int_{\partial\hat{K}} \hat{p} \{ [\|B_K^{-T}\hat{N}\| \Pi_{\partial\hat{K}}^N \hat{v} + \hat{N}^T B_K^{-1} B_K^{-T} \hat{s} \Pi_{\partial\hat{K}}^s / \|B_K^{-T}\hat{N}\|] \\
&\quad \cdot (B_K^{-T}\hat{N})_1^2 / \|B^{-T}\hat{N}\|^2 - (B_K^{-T}\hat{N})_1 (B_K^{-T}\hat{N})_2 \\
&\quad \cdot \det B_K \Pi_{\partial K}^s v / \|B_K^{-T}\hat{N}\| \} \|B^{-T}\hat{N}\| |\det B_K| d\hat{s} \\
&\quad - \int_{\hat{K}} (B_K^{-T} D_{\hat{x}} \hat{p})_1 \widehat{\Pi_K^{e_1} v} |\det B_K| d\hat{x}, \forall \hat{p} \in N_{\hat{K}}^2.
\end{aligned}$$

利用(6.4.2)式得

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} \hat{p} \widehat{\Pi_K^{(2,0)} v} d\hat{x} &= \int_{\partial\hat{K}} \hat{p} \Big\{ (B_K^{-T}\hat{N})_1^2 \Pi_{\partial\hat{K}}^N \hat{v} \\
&\quad + \Big[(B_K^{-T}\hat{N})_1^2 \frac{\hat{N}^T B_K^{-1} B_K^{-T} \hat{s}}{\|B_K^{-T}\hat{N}\|^2} \\
&\quad - (B_K^{-T}\hat{N})_1 (B_K^{-T}\hat{N})_2 \det B_K \Big] \Pi_{\partial\hat{K}}^s \hat{v} \Big\} d\hat{s} \\
&\quad - \int_K (B_K^{-T} D_{\hat{x}} \hat{p})_1 (B_K^{-T} (\Pi_{\hat{K}}^{e_1} \hat{v}, \Pi_{\hat{K}}^{e_2} \hat{v})^T)_1 d\hat{x},
\end{aligned}$$

进一步得

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} \hat{p} \widehat{\Pi_K^{(2,0)} v} d\hat{x} &= b^{11} b^{11} \Big\{ \int_{\partial\hat{K}} \hat{p} (\hat{N}_1^2 \Pi_{\partial\hat{K}}^N \hat{v} - \hat{N}_1 \hat{N}_2 \Pi_{\partial\hat{K}}^s \hat{v}) d\hat{s} \\
&\quad - \int_{\hat{K}} D^{e_1} \hat{p} \Pi_{\hat{K}}^{e_1} \hat{v} d\hat{x} \Big\} + 2 b^{11} b^{12} \Big\{ \int_{\partial\hat{K}} \hat{p} (2 \hat{N}_1 \hat{N}_2 \Pi_{\partial\hat{K}}^N \hat{v} \\
&\quad - (\hat{N}_1^2 - \hat{N}_2^2) \Pi_{\partial\hat{K}}^s \hat{v}) d\hat{s} - \int_K (D^{e_1} \hat{p} \Pi_{\hat{K}}^{e_2} \hat{v} + D^{e_2} \hat{p} \Pi_{\hat{K}}^{e_1} \hat{v}) d\hat{x} \Big\} \\
&\quad + b^{12} b^{12} \Big\{ \int_{\partial\hat{K}} \hat{p} (\hat{N}_2^2 \Pi_{\partial\hat{K}}^N \hat{v} + \hat{N}_1 \hat{N}_2 \Pi_{\partial\hat{K}}^s \hat{v}) d\hat{s} \\
&\quad - \int_K D^{e_2} \hat{p} \Pi_{\hat{K}}^{e_2} \hat{v} d\hat{x} \Big\} + \int_{\partial\hat{K}} \phi \hat{p} \Pi_{\partial\hat{K}}^s \hat{v} d\hat{s},
\end{aligned}$$

其中

$$\psi = (B_K^{-T}\hat{N})_1^2\hat{N}B_K^{-1}B_K^{-T}\hat{s}/\|B^{-T}\hat{N}\|^2 - (B_K^{-T}\hat{N})_1(B_K^{-T}\hat{N})_2\det B_K$$
$$+ b^{11}b^{11}\hat{N}_1\hat{N}_2 + 2b^{11}b^{12}(\hat{N}_1^2 - \hat{N}_2^2) - b^{12}b^{12}\hat{N}_1\hat{N}_2.$$

若 $\psi|_{\partial\hat{K}} = 0$，则由(5.4.1)可知(6.4.3)式对 $l = k = 1$ 为真。实际上，$\forall u, w \in C^1(K)$，利用下述关系

$$\widehat{\frac{\partial w}{\partial s}} = \|B_K^{-T}\hat{N}\|\det B_K \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{s}},$$
$$\widehat{\frac{\partial w}{\partial N}} = \|B_K^{-T}\hat{N}\| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{N}} + \frac{\hat{N}^T B_K^{-1}B_K^{-T}\hat{s}}{\|B_K^{-T}\hat{N}\|} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{s}}, \tag{6.4.4}$$

以及导数链法则：

$$\widehat{D_x^{e_l+e_k}w} = \sum_{i,j=1}^{2} b^{li}b^{lj}D_{\hat{x}}^{e_i+e_j}\hat{w},$$

和分部积分公式，可得

$$\int_{\partial\hat{K}} \hat{u}\,\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{s}}\,\psi d\hat{s} = 0.$$

由 u 和 w 的任意性推出 $\psi = 0$. 类似地可证明(6.4.3)式的其它情形。

有了(6.4.3)式，用和 $m = 1$ 的情形类似的方法可得定理的结论。这里用到仿射族的条件 2)的第一个性质，在条件 2)的第二个性质下，情形更简单，证明方法类似。证毕。

可以验证 RQC4 元，RQC8 元和 RQC12 元都是仿射族，这一工作留给读者完成。RQC4 元和 RQC8 元的矩阵 Q_K^1 和 Q_K^2 由(5.3.26)和(5.4.16)可知，它们分别是 3 和 5. RQC12 元的秩是 9. 所以这三个元满足单元秩条件。

第五章的例子只剩下 TQC9，TQC12 和 TQC15 元未验证单元秩条件。这三个元不是仿射族，也不是单套函数方法构造的。上面的两个定理不再适用。

定理 6.4.3 对于 TQC9 元，TQC12 元和 TQC15 元，Σ_K^2 都满足单元秩条件。

证明 对这三个元，为了证明对任意三角形 K，Q_K^2 的秩是 $M_2 - 3$，只须证明：若 $\Pi_K^\beta u = 0, |\beta| = 2$，则

$$\Pi_{\partial K}^{N} u = \frac{\partial}{\partial N} \Pi_K^0 u|_{\partial K},$$

且 $\Pi_K^0 u \in P_1(K)$。

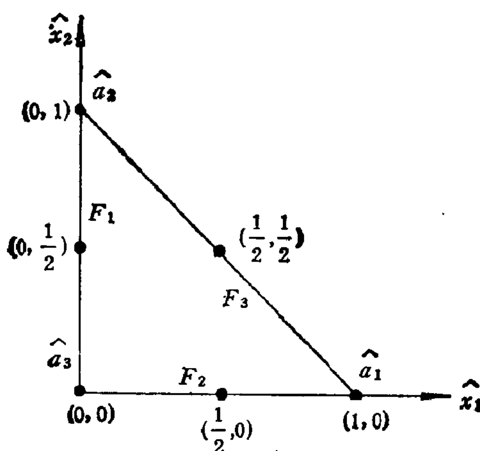


图 6.4.1

假设当 $|\beta| = 2$ 时 $\Pi_K^\beta u = 0$，由于 $\Pi_K^\beta p = D^\beta p$，$|\beta| \leqslant 2$，$\forall p \in P_1(K)$，不妨设 $\Pi_K^0 u$ 在 K 的顶点处取值为 0。标准单元 $\hat{K}$ 如图 6.4.1 所示。注意 $\Pi_K^{e_i} u = D^{e_i} \Pi_K^0 u$，在(5.4.1)的后三个式子中，利用分部积分公式，再做积分变量代换 $x = B_K \hat{x} + b_K$，并且注意(5.2.10)及(5.2.14)—(5.2.15)式可得，对于 $|\beta| = 2, \hat{p} \in P_r(\hat{K})$，有

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{p} (B_K^{-T} \hat{N})_1^{\beta_1} (B_K^{-T} \hat{N})_2^{\beta_2} \left(\widehat{\Pi_{\partial K}^{N} u} - \frac{\partial}{\partial N} \widehat{\Pi_K^0 u} \right) d\hat{s} / \| B_K^{-T} \hat{N} \|$$

$$+ \int_{\hat{K}} \hat{p} D_{\hat{x}}^{\beta} \widehat{\Pi_K^0 u} d\hat{x} = 0,$$

其中 r 在 TQC9，TQC12 和 TQC15 元时分别是 1,2,2。注意，

$$1 \leqslant i, j \leqslant 2,\ D_x^{e_i + e_j} \Pi_K^0 u = \sum_{k,l=1}^{2} b^{ik} b^{jl} D_{\hat{x}}^{e_k + e_l} \Pi_K^0 u,$$

所以上式化成

$$\int_{\hat{K}} \hat{p} D_{\hat{x}}^{\beta} \widehat{\Pi_K^0 u} d\hat{x} + \int_{\partial \hat{K}} \hat{p} \hat{N}_1^{\beta_1} \hat{N}_2^{\beta_2} \left(\widehat{\Pi_{\partial K}^N u} - \widehat{\frac{\partial}{\partial N} \Pi_K^0 u} \right) d\hat{s} / \| B_K^{-T} \hat{N} \| = 0,$$

$$\forall \hat{p} \in P_r(\hat{K}), |\beta| = 2. \tag{6.4.5}$$

记 $P_2(\hat{K})$ 中的一组正交基如下:

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = 1 - 2\hat{x}_1, \hat{p}_2 = 1 - 2\hat{x}_2, \hat{p}_3 = 2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 1, \\ \hat{p}_4 = 20\hat{x}_1\hat{x}_2 - 4(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + 1, \\ \hat{p}_5 = 7(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + 12\hat{x}_1\hat{x}_2 - 8(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) + 2, \\ \hat{p}_6 = 35(\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2) - 28(\hat{x}_1 - \hat{x}_2). \end{cases} \tag{6.4.6}$$

首先考虑 TQC12 元. 此时

$$r = 2, \Pi_K^0 u \in P_3(K), \ \Pi_{\partial K}^N u - \frac{\partial}{\partial N} \Pi_K^0 u|_{F_i}$$

是二次多项式,由于它在 F_i 的两个端点为 0,因此记

$$\left(\widehat{\Pi_{\partial K}^N u} - \frac{\partial}{\partial N} \widehat{\Pi_K^0 u} \right) \Big|_{F_i} = 4 \| B_K^{-T} \hat{N} \| \lambda_j \lambda_k \xi_i,$$

$$j \neq k \neq i, \ i = 1,2,3, \tag{6.4.7}$$

其中 ξ_i 是待定常数. 在(6.4.5)式中取 $\hat{p} = \hat{p}_4$, 注意到

$$D_{\hat{x}}^{\beta} \widehat{\Pi_K^0 u} \in P_1(\hat{K}), \ |\beta| = 2,$$

$\hat{p}_4$ 正交于 $P_1(\hat{K})$, 所以得

$$\int_{\partial \hat{K}} \hat{N}_1^2 \hat{N}_2^2 \hat{p}_4 \left(\widehat{\Pi_{\partial K}^N u} - \frac{\partial}{\partial N} \widehat{\Pi_K^0 u} \right) d\hat{s} / \| B_K^{-T} \hat{N} \| = 0.$$

进而推得 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. 所以

$$D_{\hat{x}}^{\beta} \widehat{\Pi_K^0 u} = 0, |\beta| = 2, \Pi_{\partial K}^N u = \frac{\partial}{\partial N} \Pi_K^0 u|_{\partial K}, \Pi_K^0 u \in P_1(K).$$

其次考虑 TQC15 元. 此时

$$r = 2, \ \Pi_K^0 u \in P_4(K), \ \Pi_{\partial K}^N u - \frac{\partial}{\partial N} \Pi_K^0 u|_{F_i}$$

是三次多项式,且在 F_i 的两端点和中点取值为 0, 所以记

$$\left(\widehat{\Pi_{\partial K}^N u} - \frac{\partial}{\partial N} \widehat{\Pi_K^0 u} \right) \| B_K^{-T} \hat{N} \|^{-1} |_{F_i}$$

$$= \begin{cases} \xi_1 \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_2)(2\hat{x}_2 - 1), i = 1, \\ \xi_i \hat{x}_1 (1 - \hat{x}_1)(2\hat{x}_1 - 1), i = 2,3, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} D_{\hat{x}}^{(2,0)}\widehat{\Pi_K^0 u} \\ D_{\hat{x}}^{(1,1)}\widehat{\Pi_K^0 u} \\ D_{\hat{x}}^{(0,2)}\widehat{\Pi_K^0 u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_6 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_6 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_6 \end{pmatrix}.$$

由(6.4.5)式计算得出

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_6 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_6 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\xi_1}{5} & -\frac{\xi_1}{5} & \frac{12}{35}\xi_1 & \frac{3}{14}\xi_1 & \frac{3}{70}\xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_2}{5} & 0 & -\frac{\xi_2}{5} & \frac{12}{35}\xi_2 & \frac{3}{14}\xi_2 & \frac{3}{70}\xi_2 \end{pmatrix}$$

$$+\xi_3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{70}\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{70}\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{70}\sqrt{2} \end{pmatrix}. \qquad (6.4.8)$$

注意到

$$D_{\hat{x}}^{(0,2)} D_{\hat{x}}^{(2,0)}\widehat{\Pi_K^0 u} = D_{\hat{x}}^{(1,1)} D_{\hat{x}}^{(1,1)}\widehat{\Pi_K^0 u},\ D_{\hat{x}}^{(2,0)} D_{\hat{x}}^{(0,2)}\widehat{\Pi_K^0 u} = D_{\hat{x}}^{(1,1)} D_{\hat{x}}^{(1,1)}\widehat{\Pi_K^0 u},$$

推得

$$\begin{cases} -a_2 + a_3 - 2a_4 - 4a_5 + 14a_6 = -b_1 + b_2 - 2b_4 - 4b_5 - 14b_6, \\ 10a_4 + 6a_5 = 7b_5 + 35b_6, \\ 7a_5 - 35a_6 = 10b_4 + 6b_5, \\ -c_1 + c_3 - 2c_4 - 4c_5 - 14c_6 = -b_2 + b_3 - 2b_4 - 4b_5 + 14b_6, \\ 7c_5 + 35c_6 = 10b_4 + 6b_5, \\ 10c_4 + 6c_5 = 7b_5 - 35b_6. \end{cases} \qquad (6.4.9)$$

将(6.4.8)式代入(6.4.9)式中，由(6.4.9)式中的第 2,3 和 6 等式得

$$\frac{33}{7}\xi_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\xi_3,\quad \frac{3\sqrt{2}}{2}\xi_3 = 0,$$

$$\frac{33}{7}\xi_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\xi_3.$$

即 $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$。所以

$$\Pi_{\partial K}^N u-\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0 u|_{\partial K}=0,\ D_{\hat{x}}^{\beta}\widehat{\Pi_K^0 u}=0,|\beta|=2.$$

因而 $\Pi_K^0 u\in P_1(K)$。

最后考虑 TQC9 元。此时

$$r=1,\Pi_K^0 u\in P_3(K),\widehat{\Pi_{\partial K}^N u}-\frac{\partial}{\partial N}\widehat{\Pi_K^0 u}|_{\hat{F}_i}$$

在 $\hat{F}_i$ 的两端点处为 0,而且是二次多项式,所以可以令

$$\begin{pmatrix} D_{\hat{x}}^{(2,0)}\widehat{\Pi_K^0 u} \\ D_{\hat{x}}^{(1,1)}\widehat{\Pi_K^0 u} \\ D_{\hat{x}}^{(0,2)}\widehat{\Pi_K^0 u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3\end{pmatrix}, \tag{6.4.10}$$

$$\|B_K^{-T}\hat{N}\|^{-1}\left(\widehat{\Pi_{\partial K}^N u}-\frac{\partial}{\partial N}\widehat{\Pi_K^0 u}\right)\bigg|_{\hat{F}_i}$$

$$=\begin{cases}\xi_1\hat{x}_2(1-\hat{x}_2), & i=1, \\ \xi_2\hat{x}_1(1-\hat{x}_1), & i=2, \\ \xi_3\hat{x}_1\hat{x}_2\sqrt{2}, & i=3,\end{cases} \tag{6.4.11}$$

其中 a_i,b_i,c_i 及 ξ_i 是待定常数。通过(6.4.5)式可算得

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\xi_1 & 0 & -\xi_3 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \\ 0 & -\xi_2 & -\xi_3\end{pmatrix}, \tag{6.4.12}$$

通过(6.4.10)和(6.4.12)式,由

$$\widehat{\Pi_K^0 u}(\hat{a}_i)=0$$

算得

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi_K^0 u}=&\frac{1}{6}\xi_1(2\hat{x}_1^3-3\hat{x}_1^2+\hat{x}_1) \\ &+\frac{1}{6}\xi_2(2\hat{x}_2^3-3\hat{x}_2^2+\hat{x}_2) \\ &+\frac{1}{6}\xi_3(-2\hat{x}_1^3-2\hat{x}_2^3-6\hat{x}_1^2\hat{x}_2-6\hat{x}_1\hat{x}_2^2 \\ &+3\hat{x}_1^2+3\hat{x}_2^2+6\hat{x}_1\hat{x}_2-\hat{x}_1-\hat{x}_2).\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

由此算出，当 $i=1,2,3$ 时

$$D_{\hat{x}}\widehat{\Pi_K^0 u}(\hat{a}_i)=\frac{1}{6}(\xi_1-\xi_3,\xi_2-\xi_3)^T.$$

利用(5.3.22)式，注意

$$D_x\Pi_K^0 u(a_i)=B_K^{-T}D_{\hat{x}}\widehat{\Pi_K^0 u}(\hat{a}_i),\ a_i-a_j=B_K(\hat{a}_i-\hat{a}_j),$$
$$i=1,2,3,j\neq i,$$

可得

$$\widehat{\Pi_K^0 u}=\frac{1}{12}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant 3\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j(1+\lambda_i-\lambda_j)(\xi_1-\xi_3,\xi_2-\xi_3)(\hat{a}_j-\hat{a}_i). \tag{6.4.14}$$

在(6.4.13)和(6.4.14)式中均令

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3},$$

注意 $\lambda_1=\hat{x}_1,\lambda_2=\hat{x}_2,\lambda_3=1-\hat{x}_1-\hat{x}_2$，所以得

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0. \tag{6.4.15}$$

由(6.4.13)的 $\widehat{\Pi_K^0 u}$ 的表达式和 $\Pi_{3K}^N u$ 的构造，可得，在 F_i 的中点 $\hat{a}_{i+3}$ 上下式成立：

$$\|B_K^{-T}\hat{N}\|\left(\widehat{\Pi_{3K}^N u}-\frac{\partial}{\partial N}\widehat{\Pi_K^0 u}\right)(\hat{a}_{i+3})$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(\xi_2 D_x\hat{x}_2-\xi_3(D_x\hat{x}_1+D_x\hat{x}_2))\cdot B_K^{-T}\hat{N},i=1,\\ \frac{1}{4}(\xi_1 D_x\hat{x}_1-\xi_3(D_x\hat{x}_1+D_x\hat{x}_2))\cdot B_K^{-T}\hat{N},i=2,\\ \frac{1}{4}(\xi_1 D_x\hat{x}_1+\xi_2 D_x\hat{x}_2)\cdot B_K^{-T}\hat{N},i=3,\end{cases} \tag{6.4.16}$$

其中利用了(5.2.14)式。记 $B_K^{-T}=(b^{ij})$，则 $D_x\hat{x}_i=(b_{1i},b_{2i})^T$。令

$$a=(b^{11})^2+(b^{21})^2,\ b=b^{11}b^{12}+b^{21}b^{22},$$
$$c=(b^{12})^2+(b^{22})^2, \tag{6.4.17}$$

由(6.4.16)和(6.4.11)式得

$$\begin{cases}\xi_1 a+\xi_2 b-\xi_3(a+b)=0,\\ \xi_1 b+\xi_2 c-\xi_3(c+b)=0,\\ \xi_1(a+b)+\xi_2(b+c)-\xi_3(a+c+2b)=0.\end{cases} \tag{6.4.18}$$

从(6.4.18)和(6.4.15)式推出，

$$\begin{cases}\xi_1(2a+b)+\xi_2(a+2b)=0,\\ \xi_1(c+2b)+\xi_2(2c+b)=0.\end{cases} \tag{6.4.19}$$

方程组(6.4.19)的系数矩阵的行列式为

$$\begin{aligned}&(2a+b)(2c+b)-(a+2b)(c+2b)\\ &=3(ac-b^2)=3(b^{11}b^{22}-b^{21}b^{12})^2>0,\end{aligned}$$

所以 $\xi_1=\xi_2=0$. 再由(6.4.15)式得 $\xi_3=0$. 这就证明

$$\widehat{\Pi_K^0 u}=0,\quad \widehat{\Pi_{\partial K}^N u}-\frac{\partial}{\partial N}\widehat{\Pi_K^0 u}|_{\partial K}=0.$$

上述讨论得到了定理的结论. 证毕.

§ 6.5 强 F-E 检验

本节讨论第五章给出的例子通过强 F-E 检验的验证. 首先，在 Σ_K^1 的情形，第五章第三节的 SLCk 元 ($k=1,2,3$)，SLC3′元，RLCk 元 ($k\geqslant 1$)，RLC2′ 元，SHC3 元，Zienkiewicz 元，都通过任意阶强 F-E 检. 事实上，协调元通过单元内边界时是连续的，所以它通过任意强 F-E 检验.

SLC1 元. 对 $K\in\mathscr{K}$，令 $\Pi_{\partial K}^F=\Pi_{\partial K}$，$\Pi_{\partial K}^\xi=0$. 于是 $\Pi_{\partial K}^\xi$ 满足任意阶强 F-E 检验. 对 $K_1,K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是 $(n-1)$ 维公共表面. 所以 F 是 $(n-1)$ 维单纯形，记它的顶点是 $a_1,\cdots,a_n$. 由 $\Pi_{\partial K}$ 的构造可知，$\forall v\in C^1(K_1\cup K_2)$，$\Pi_{\partial K_1}v|_F$，$\Pi_{\partial K_2}v|_F$ 都是 F 上的一次多项式，且

$$(\Pi_{\partial K_1}v|_F)(a_i)=v(a_i)=(\Pi_{\partial K_2}v|_F)(a_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

由定理 6.3.1 (此时 n 替换为 $n-1$)，定义在 F 上的一次多项式由它在 F 的顶点 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 处的唯一确定，所以 $\Pi_{\partial K_1}v|_F=$

$\Pi_{\partial K_2}v|_F$. 即 SLC1 元通过任意强 F-E 检验。

对于上面提到的协调元，可用类似的方法证明它们都通过任意阶强 F-E 检验。当单元不是协调元时，验证它们通过强 F-E 检验，通常要用到下面的等式。设 $[a_1,a_2]$ 是 R^1 中的闭区间，则

$$\int_{a_1}^{a_2} p\,dt=(a_2-a_1)p\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right),\quad \forall p\in P_1([a_1,a_2]),\qquad (6.5.1)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} p\,dt=\frac{a_2-a_1}{6}\left(p(a_1)+4p\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+p(a_2)\right),$$

$$\forall p\in P_3([a_1,a_2]).\qquad (6.5.2)$$

记 $b_{r1},\cdots,b_{rr}\in[a_1,a_2]$ 是 $[a_1,a_2]$ 上的 r 阶 Guass 点，即它们是定义在 $[a_1,a_2]$ 的 r 阶 Legendre 多项式的 r 个零点，则

$$\int_{a_1}^{a_2} p\,dt=\sum_{i=1}^{r}\phi_{ri}p(b_{ri}),\quad \forall p\in P_{2r-1}([a_1,a_2]),\qquad (6.5.3)$$

其中 ϕ_{ri} 是与 p 无关的常数，称为 Guass 积分常数。上述等式可在任一本数值逼近的书中查到。

在下面，总设 $K_1,K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是 K_1,K_2 的公共边，且 $F=[a_1,a_2]$ 是点 a_1,a_2 间线段，切向量是 a_2-a_1，$w\in C^{s_m}(K_1\cup K_2)$。

SLN1 元。$\forall K\in\mathscr{K}$，$\Pi^F_{\partial K}=\Pi_{\partial K}$，$\Pi^E_{\partial K}=0$。由于 $\Pi_{\partial K_1}w|_F$ 和 $\Pi_{\partial K_2}w|_F$ 都属于 $P_1(F)$，且它们在 F 的中点

$$\frac{1}{2}(a_1+a_2)$$

处都与 w 的值相等，因而由(6.5.1)式可得

$$\int_F p\Pi_{\partial K_1}w\,ds=\int_F p\Pi_{\partial K_2}w\,ds,\quad \forall p\in P_0(K_1\cup K_2).\qquad (6.5.4)$$

所以 SLN1 元通过 0 阶强 F-E 检验。

Wilson 元。$\forall K\in\mathscr{K}$，$v\in C^{s_1}(K)$，令

$$\begin{cases}\Pi^F_{\partial K}v=\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi_1^i\xi_1)(1+\xi_2^i\xi_2)v(a_i)|_{\partial K},\\ \Pi^E_{\partial K}v=\sum_{i=1}^{2}\phi_i(v)(1-\xi_i\xi_i)|_{\partial K}.\end{cases}$$

则 $\Pi^F_{\partial K_1}w|_F=\Pi^F_{\partial K_2}w|_F$，这是因为它们在 F 上都是一次多项式，且在 F 的两端点相等．由定理 6.3.5 可知，$\forall p\in Q_1$，$\Pi^F_{\partial K}p=p|_{\partial K}$．对 $\Pi^E_{\partial K}v$ 有

$$\int_{\partial K}\Pi^E_{\partial K}vN_1ds=h_2\int_{-1}^{1}\phi_2(v)(1-\xi_2^2)d\xi_2$$

$$-h_2\int_{-1}^{1}\phi_2(v)(1-\xi_2^2)d\xi_2=0,$$

$$\int_{\partial K}\Pi^E_{\partial K}vN_2ds=h_1\int_{-1}^{1}\phi_1(v)(1-\xi_1^2)d\xi_1$$

$$-h_1\int_{-1}^{1}\phi_1(v)(1-\xi_1^2)d\xi_1=0.$$

所以 Wilson 元通过 0 阶强 F-E 检验．

RQC4 元．$\forall K\in\mathscr{K}$，$\Pi^F_{\partial K}=\Pi_{\partial K}$，$\Pi^E_{\partial K}=0$．$\Pi_{\partial K_1}w|_F$ 和 $\Pi_{\partial K_2}w|_F$ 都是 F 上的一次多项式，且在 F 的中点都与 w 相等，所以由 (6.5.1) 式可得 (6.5.4) 式成立．所以 RQC4 元通过 0 阶强 F-E 检验．

上面讨论的都是 Σ_K^1 的情形，现在考虑 Σ_K^2 的情形．这时，对 TQC9，TQC12，TQC15，Bell 元，Argyris 元，RQC12 元，Bogner-Fox-Schmidt 元，由 $\Pi^s_{\partial K}$，$\Pi^N_{\partial K}$ 通过单元内边界时，绝对值相等，方向相反，所以它们都是通过任意阶强 F-E 检验．我们以 TQC9 元为例说明．

TQC9 元．对 $K\in\mathscr{K}$，$\Pi^{sF}_{\partial K}=\Pi^s_{\partial K}$，$\Pi^{sE}_{\partial K}=0$，$\Pi^{NF}_{\partial K}=\Pi^N_{\partial K}$，$\Pi^{NE}_{\partial K}=0$．由 TQC9 元的构造可知，$\Pi^0_{K_1}w|_F=\Pi^0_{K_2}w|_F$，所以

$$\Pi^s_{\partial K_1}w|_F=\frac{\partial}{\partial s}\Pi^0_{K_1}w|_F=-\frac{\partial}{\partial s}\Pi^0_{K_2}w|_F=-\Pi^s_{\partial K_2}w|_F.$$

对 $\Pi^N_{\partial K_1}w|_F,\Pi^N_{\partial K_2}w|_F$，它们都是 F 上的一次多项式，且在 F 的端点处分别与 w 在点处关于 $\partial K_1,\partial K_2$ 的法向导数值相等，所以

$$\Pi^N_{\partial K_1}w|_F+\Pi^N_{\partial K_2}w|_F=0.$$

即 TQC9 元通过任意强 F-E 检验．

下面验证其它元．首先考虑 TQC6 元．$\forall K\in\mathscr{K}$，$\Pi^{NF}_{\partial K}=\Pi^N_{\partial K}$，$\Pi^{sF}_{\partial K}=\Pi^s_{\partial K}$．由于

$$\Pi_{\partial K_i}^s w = \frac{\partial}{\partial s} \Pi_{K_i}^0 w|_{\partial K_i}, \quad i = 1, 2,$$

所以

$$\int_F \Pi_{\partial K_1}^s w ds = \Pi_{K_1}^0 w(a_2) - \Pi_{K_1}^0 w(a_1)$$

$$= -(\Pi_{K_2}^0 w(a_1) - \Pi_{K_2}^0 w(a_2)) = -\int_F \Pi_{\partial K_2}^s w ds.$$

而 $\Pi_{\partial K_1}^N w|_F, \Pi_{\partial K_2}^N w|_F \in P_1(F)$，且在 F 的中点分别与 w 在该点关于 $\partial K_1, \partial K_2$ 的法向导数值相等，所以由(6.5.1)式得

$$\int_F \Pi_{\partial K_1}^N w ds = -\int_F \Pi_{\partial K_2}^N w ds.$$

因而 TQC6 元通过 0 阶强 F-E 检验。

用上述方法可以证明 RQC8 元通过 0 阶强 F-E 验验。留给读者作为练习。

最后考虑 Adini 元。从 $\Pi_K^0 v$ 的导数入手。由该元的构造可知，$D\Pi_K^0 v$ 在 K 的顶点处与 Dv 相等。设

$$\begin{cases} RD\Pi_K^0 v \equiv (R_1, R_2)^T = D\Pi_K^0 v \\ \quad - \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{i=1}^4 (1 + \xi_1^i \xi_1)(1 + \xi_2^i \xi_2) D\Pi_K^0 v(a_i), \\ \Pi_{\partial K}^{NF} v = (D\Pi_K^0 v - RD\Pi_K^0 v) \cdot N|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^{NE} v = RD\Pi_K^0 v \cdot N|_{\partial K}, \\ \Pi_{\partial K}^{sF} v = (D\Pi_K^0 v - RD\Pi_K^0 v) \cdot s|_{\partial K}, \Pi_{\partial K}^{sE} v = RD\Pi_K^0 v \cdot s|_{\partial K}. \end{cases}$$

由于 $D\Pi_K^0 v - RD\Pi_K^0 v$ 通过单元内边界是连续的，故

$$\Pi_{\partial K_1}^{NF} w|_F = -\Pi_{\partial K_2}^{NF} w|_F, \Pi_{\partial K_1}^{sF} w|_F = -\Pi_{\partial K_2}^{sF} w|_F.$$

现在讨论 $\Pi_{\partial K}^{NE} v, \Pi_{\partial K}^{sE} v$。由于在 K 的每个边上，$N_1 N_2 = 0$，所以当 $p = 1$ 时(6.1.4)式变成

$$\int_{\partial K} \begin{bmatrix} N_1^2 \Pi_{\partial K}^{NE} v \\ (N_1^2 - N_2^2) \Pi_{\partial K}^{sE} v \\ N_2^2 \Pi_{\partial K}^{NE} v \end{bmatrix} ds = 0. \qquad (6.5.5)$$

在 F_2, F_4 上 $N_1 = 0$，F_3, F_1 上 $N_2 = 0$。所以

$$\int_{\partial K} N_1^2 \Pi_{\partial K}^{NE} v ds = \int_{F_1} \Pi_{\partial K}^{NE} v ds + \int_{F_3} \Pi_{\partial K}^{NE} v ds$$

$$= \int_{F_1} R_1 ds - \int_{F_3} R_1 ds.$$

由于 R_1 是三次多项式，R_1 在 F_1, F_3 的端点处为 0，所以由(6.5.2)式得

$$\int_{\partial K} N_1^2 \Pi_{\partial K}^{NE} v ds$$
$$= \frac{4h_2}{3}\left[R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) - R_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)\right].$$

由 Taylor 展式得

$$0 = R_1(a_1) = R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) + \frac{1}{2} D^{e_2} R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) h_2$$
$$+ \frac{1}{8} D^{(0,2)} R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) h_2^2,$$
$$0 = R_1(a_4) = R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) - \frac{1}{2} D^{e_2} R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) h_2$$
$$+ \frac{1}{8} D^{(0,2)} R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) h_2^2,$$

所以

$$R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) = -\frac{1}{8} D^{(0,2)} R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) h_2^2.$$

类似地

$$R_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) = -\frac{1}{8} D^{(0,2)} R_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) h_2^2.$$

由于 $D^{(0,2)} R_1$ 是一次多项式，所以

$$R_1\left(\frac{a_1+a_4}{2}\right) - R_1\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) = -\frac{h_1 h_2^2}{8} D^{(1,2)} R_1(x_0).$$

由于

$$D^{(1,2)} R_1 = D^{(2,2)} \Pi_K^0 v, \Pi_K^0 v \in \text{span}\{P_3(K), x_1 x_2^3, x_1^3 x_2\}.$$

所以 $D^{(1,2)} R_1 = 0$。即

$$\int_{\partial K} N_1^2 \Pi_{\partial K}^{NE} v ds = 0.$$

类似地，可证明(6.5.5)式中的其它各式，这样就证明了 Adini 元

通过 0 阶强 F-E 检验。

到目前为此，我们已经验证了第五章所给出的单元都满足本章第一节的基本假设 H_m。表 6.5.1 给出了这些单元有关基本假设

表 6.5.1

	单　元	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	逼近性条件	r 阶强 F-E-检验
Σ_K^1	SLCk ($1\leqslant k\leqslant 3$)	k	k	k			$k+1>n/\sigma$	$r\geqslant 0$
	SLC3′	2	2	2			$3>n/\sigma$	$r\geqslant 0$
	RLCk ($1\leqslant k$)	k	k	k			$k+1>n/\sigma$	$r\geqslant 0$
	RLC2′	2	2	2			$3>n/\sigma$	$r\geqslant 0$
	SHC3	3	3	3			$3>n/\sigma$	$r\geqslant 0$
	Zienkiewicz	2	2	2			$\sigma>1$	$r\geqslant 0$
	SLN1	1	1	1			$\sigma>1$	0
	Wilson	1	1	1			$\sigma>1$	0
	RQC4	1	1	2			$\sigma>1$	0
Σ_K^2	TQC6	2	2	2	2	2	$\sigma>1$	0
	TQC9	2	2	2	2	3	$\sigma>1$	$r\geqslant 0$
	TQC12	3	3	3	3	4	$\sigma>2/3$	$r\geqslant 0$
	TQC15	4	4	4	3	4	$\sigma>2/3$	$r\geqslant 0$
	Bell	4	4	4	4	4	$\sigma>2/3$	$r\geqslant 0$
	Argyris	5	5	5	5	5	$\sigma>1/2$	$r\geqslant 0$
	RQC8	2	2	2	2	3	$\sigma>1$	0
	Adini	3	3	3	3	3	$\sigma>2/3$	0
	RQC12	3	3	3	2	3	$\sigma>1$	$r\geqslant 0$
	B-F-S	3	3	3	3	3	$\sigma>1$	$r\geqslant 0$

的参数。值得一提的是，Zienkiewicz 元作为 Σ_K^1 时满足 H_1，做为 Σ_K^2，在一般的三角形剖分时不满足 H_2，所以未将它列入 Σ_K^2 中。

在以前作者的文献中，统称仿射连续性和尺度不变性为正规仿射连续性，强 F-E 检验为 IPT 检验。我们觉得仿射连续性和尺度不变性要比正规仿射连续性直观一些。将 IPT 检验换成强 F-E 检验的原因一是直观，F 表示表面 (face)，E 表示单元 (ele-

ment)，一是与第七章的 F-E 检验对应。

强 F-E 检验是用于代替工程力学中流行的"分片检验"和广义分片检验的。在 H_m 其它条件成立时，通过分片检验不能保证有限元方法的收敛性，通过广义分片检验对实际应用人员来说，验证起来又难了一些，而且力学意义上没有直观的解释。关于这个问题的详细讨论参见文[29]及其后的文献。

第七章　有限元空间的基本性质

有限元空间是用于逼近 Sobolev 空间的，所以它们对 Sobolev 空间应有一定意义的逼近性质. 另外，Sobolev 空间的性质在有限元空间上有类似的性质对应也应该是自然的. 本章的内容就是讨论这些对应的性质. 得到这些性质的前提是第六章对 Σ_K^m 的基本假设.

对于 $\mu\in[1,\infty]$，记 μ' 是 μ 的对偶数，即 μ,μ' 满足

$$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}=1.$$

本章总是假定 Ω 是 R^n 中的多胞形域，Ω 的剖分族 $\{K_k\}$ 满足条件 K1—K3.

本章的内容是这样安排的：第一节叙述用 Σ_K^m 构造的有限元空间 W_h^m 的基本性质；第二节给出第一节的引理和逼近性定理的证明；第三节给弱闭性定理的证明；第四节给嵌入性定理的证明；第五节给紧致性定理的证明. 对证明不感兴趣的读者可以只读第一节.

§7.1　有限元空间的基本性质

由第五章可知，对于 $u\in C^m(K)$，$D^\beta u$ 的近似函数是由 $\Pi_K^0 u$，$\Pi_{\partial K}u(\Pi_{\partial K}^t u,\Pi_{\partial K}^N u)$ 及 N_K^α 唯一确定的. 所以 $\Pi_K^\beta u$ 对 u 的近似误差化为 Σ_K^m 的误差是合情理的，下面的引理证实了这一点.

引理 7.1.1　下述结论为真：(1) 对于 $\mu\in[1,\infty]$，存在与 K,h 无关的常数 C 使得，当 $l=0,1$ 时，

$$\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta u-\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K}\leqslant Ch^{1-j}\Big\{\sum_{|\beta|=1}\min_{p\in N_K^\beta}\|D^\beta u-p\|_{0,\mu,K}$$

$$+h^{-1}\|u-\Pi_K^0 u\|_{0,\mu,K}+h^{-1/\mu'}\|u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}\Big\},\quad(7.1.1)$$

$\forall u\in C^1(K)$, $\forall K\in K_h$, $\forall h\in(0,1)$ 一致成立. (2) 对于 $\mu\in[1,\infty]$, 存在与 K,h 无关的常数 C 使得, 当 $j=0,1,2$ 时,

$$\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta u-\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K}\leqslant C\Big\{\sum_{|\beta|=1,2}h^{|\beta|-j}\min_{p\in N_K^\beta}\|D^\beta u-p\|_{0,\mu,K}$$

$$+h^{-j}\|u-\Pi_K^0 u\|_{0,\mu,K}+h^{\frac{1}{\mu}-j}\|u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}$$

$$+h^{\frac{1}{\mu}+1-j}\Big[\Big\|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^N u\Big\|_{0,\mu,\partial K}$$

$$+\Big\|\frac{\partial u}{\partial s}-\Pi_{\partial K}^s u\Big\|_{0,\mu,\partial K}\Big]\Big\},\qquad(7.1.2)$$

$\forall u\in C^2(K)$, $\forall K\in K_h$, $\forall h(0,1)$ 一致成立.

对于 $\Pi_K^0,\Pi_{\partial K}$ 等的误差,我们有下述引理.

引理 7.1.2 (1)设 Σ_K^1 具有仿射连续性,尺度不变性和逼近性, $\sigma\in[1,\infty]$. 令 $\mu_j\geqslant\sigma$ 且当 $n>(1-j)\sigma$ 时

$$\mu_j\leqslant n\sigma/(n-(1-j)\sigma);$$

当 $n=(1-j)\sigma$ 时 $\mu_j<\infty$; 当 $n<(1-j)\sigma$ 时 $\mu_j\leqslant\infty$, $j=0,1$. 则存在与 K,h 无关的常数 C 使得

$$\|u-\Pi_K^0 u\|_{j,\mu_j,K}\leqslant Ch^{r_1+1-j+\frac{n}{\mu_j}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_1+1,\sigma,K},\quad j=0.1,\ (7.1.3)$$

$$\|u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu_j,\partial K}\leqslant Ch^{r_2+1+\frac{n-1}{\mu_j}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_2+1,\sigma,K},\quad(7.1.4)$$

$\forall u\in W^{r_1+1,\sigma}(K)\cap W^{r_2+1,\sigma}(K)$, $\forall K\in K_h$, $\forall h\in(0,1)$ 一致成立. (2)设 Σ_K^2 具有仿射连续性,尺度不变性和逼近性. 令 $\mu_j\geqslant\sigma$, 且设, 当 $2>(2-j)\sigma$ 时 $\mu_j\leqslant 2\sigma/(2-(2-j)\sigma)$; 当 $2=(2-j)\sigma$ 时 $\mu_j<\infty$; 当$2<(2-j)\sigma$ 时 $\mu_j\leqslant\infty$, $j=0,1,2$. 则存在与 K,h 无关的常数 C 使得

$$\|u-\Pi_K^0 u\|_{j,\mu_j,K}\leqslant Ch^{r_1+1-j-\frac{n}{\mu_j}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_1+1,\sigma,K},\ j=0,1,2.\quad(7.1.5)$$

$$\|u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu_0,\partial K}\leqslant Ch^{r_2+1+\frac{n-1}{\mu_0}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_2+1,\sigma,K},\quad(7.1.6)$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial s}-\Pi_{\partial K}^{s}u\right\|_{0,\mu_1,\partial K}\leqslant Ch^{r_3+\frac{n-1}{\mu_1}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_3+1,\sigma,K},\qquad(7.1.7)$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial N}-\Pi_{\partial K}^{N}u\right\|_{0,\mu_1,\partial K}\leqslant Ch^{r_4+\frac{n-1}{\mu_1}-\frac{n}{\sigma}}|u|_{r_4+1,\sigma,K},\qquad(7.1.8)$$

$$\forall u\in\bigcap_{i=1}^{n}W^{r_i+1,\sigma}(K),\forall K\in K_h,\forall h\in(0,1)$$

一致成立。

上述两个引理解决了近似函数 Π_K^β 的误差精度问题。引理中对 μ_i 的要求是 $W^{m,\sigma}(K)$ 连续嵌入到 $W^{j,\mu_j}(K)(j<m)$ 的条件。

从第五章构造有限元空间的方法可以看出它的特点：(1) 导数的逼近函数和函数的近似函数可以没有导数关系；(2)域内函数与边界函数往往不同；(3) 边界函数在单元边界两边也可以不连续。但是有限元空间是 Sobolev 空间的近似，所以导数的近似函数应具有一些导数的作用，域内函数与边界函数应有一定的联系，单元间的边界函数应有一定的连续性。下面引理 7.1.3 说明了这一点。

引理 7.1.3 设 Σ_K^m 具有仿射连续性，尺度不变性，弱连续性和逼近性且满足单元秩条件，$\mu\in[1,\infty]$，则下述结论为真：(1) 对 $m=1$，存在与 K,F,h 无关的常数 C 使得

$$|\Pi_K^0u|_{1,\mu,K}\leqslant C\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K}\qquad(7.1.9)$$

$$\|\Pi_K^0u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}\leqslant Ch^{1/\mu'}\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K},\quad(7.1.10)$$

$\forall u\in C^1(K),\forall K\in K_h,\forall h\in(0,1)$ 一致成立；

$$\|\Pi_{\partial K_1}w-\Pi_{\partial K_2}w\|_{0,\mu,F}\leqslant Ch^{1/\mu'}\sum_{|\beta|=1}(\|\Pi_{K_1}^\beta w\|_{0,\mu,K_1}+\|\Pi_{K_2}^\beta w\|_{0,\mu,K_2})$$
$$(7.1.11)$$

$\forall w\in C^1(K_1\cup K_2)$ 成立，这里 $F=K_1\cap K_2$ 是 K_h 中的 K_1,K_2 的公共 $n-1$ 维表面。(2)对 $m=2$，存在与 K,F,h 无关的常数

C使得

$$\sum_{j=0}^{1}\sum_{|\beta|=j}|\Pi_K^\beta u|_{2-j,\mu,K}\leqslant C\sum_{|\beta|=2}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K},\qquad(7.1.12)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\|D^{e_i}\Pi_K^0 u-\Pi_K^{e_i}u\|_{0,\mu,K}\leqslant Ch\sum_{|\beta|=2}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K},\ (7.1.13)$$

$$\begin{aligned}&\|\Pi_K^0 u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}+h\left\|\frac{\partial}{\partial s}\Pi_K^0 u-\Pi_{\partial K}^s u\right\|_{0,\mu,\partial K}\\&\quad+h\left\|\frac{\partial}{\partial N}\Pi_K^0 u-\Pi_{\partial K}^N u\right\|_{0,\mu,\partial K}\\&\leqslant Ch^{1+\frac{1}{\mu}}\sum_{|\beta|=2}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K},\end{aligned}\qquad(7.1.14)$$

$\forall u\in C^2(K),\forall K\in K_h,\forall h\in(0,1)$ 一致成立；

$$\begin{aligned}&\|\Pi_{\partial K_1}w-\Pi_{\partial K_2}w\|_{0,\mu,F}+h\|\Pi_{\partial K_1}^s w+\Pi_{\partial K_2}^s w\|_{0,\mu,F}+h\|\Pi_{\partial K_1}^N w\\&\quad+\Pi_{\partial K_2}^N w\|_{0,\mu,F}\leqslant Ch^{1+\frac{1}{\mu}}\sum_{|\beta|=2}(\|\Pi_{K_1}^\beta w\|_{0,\mu,K_1}+\|\Pi_{K_2}^\beta w\|_{0,\mu,K_2}),\end{aligned}$$

(7.1.15)

$\forall w\in C^2(K_1\cup K_2)$ 成立，这里F是 K_h 中的单元 K_1,K_2 的公共边。

下面讨论中,假设 $\mathscr{K}$ 满足：假如F是 $K\in K_h$ 的$n-1$维表面,且当 $F\subset\partial\Omega$ 时,存在 $K'\in\mathscr{K}$，$K'\subset R^n-\Omega$，使得 $F=K'\cap K$。对 $k=1,\cdots,n$，记 Ω^k 是Ω和 R^n 中的k维平面相交得到的k维区域，$\Omega^n=\Omega$。

定理 7.1.1 (逼近性定理) 令$m=1$或 $m=n=2$，$\sigma\in(1,\infty)$，设 H_m 成立。对于 $j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，假设当 $n>(m-j)\sigma$ 时，

$$n-(m-j)\sigma<k\leqslant n,\sigma\leqslant\mu\leqslant\frac{k\sigma}{n-(m-j)\sigma};$$

当 $n=(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$，$\sigma\leqslant\mu<\infty$；当 $n<(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$，$\sigma\leqslant\mu\leqslant\infty$。则 $\forall w\in W^{m,\sigma}(\Omega)$，

$$\lim_{h\to0}\inf_{w_h\in W_h^m}\left(\|w-w_h\|_{m,\sigma,\Omega}+\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta w-w_h^\beta\|_{0,\mu,\Omega^k}\right)=0.$$

若将 $W^{m,\sigma}(\Omega)$, W_h^m 换成 $\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$, $\mathring{W}_h^m$, 上述结论仍然成立。

在上述定理中，w_h^β 可能在 Ω^k 上的某个 k 维测度为 0 的集合上没有定义. Ω^k 的某个子集可能是单元 $K\in K_h$ 的边界 ∂K 的子集，这时取 w_k^β 在这子集上的值是 $w_h^\beta|_{\underline{K}}$ 在K上的连续延拓的值，这里 $\underline{K}$ 是K的内点集. 如果这样的K不止一个，可任意取定一个。本书的其它地方如遇到类似的情形，可按此意义理解.

定理 7.1.2 (弱闭性定理)　令 $m=1$ 或 $m=n=2$, $\sigma\in(1,\infty]$, 设 H_m 成立. 则 $\{W_h^m, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 是弱闭的，即对任意在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中弱收敛的序列 $u_\tau\in W^{mh_\tau}$, $\tau\in N$, 当

$$\lim_{\tau\to\infty} h_\tau = 0$$

时，$\{u_\tau\}$ 的弱极限属于 $W^{m,\sigma}(\Omega)$; 而且 $\{\mathring{W}_h^m, \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 也是弱闭的.

定理 7.1.3 (嵌入定理)　令 $m=1$ 或 $m=n=2$, $\sigma\in(1,\infty)$. 设 H_m 成立，对于 $j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$, 假设当 $n>(m-j)\sigma$ 时，

$$n-(m-j)\sigma<k\leqslant n,\ \sigma\leqslant\mu\leqslant\frac{k\sigma}{n-(m-j)\sigma};$$

当 $n=(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sigma\leqslant\mu<\infty$; 当 $n<(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$, $\sigma\leqslant\mu\leqslant\infty$, 则存在与 h 无关的常数 C 使得

$$w_h\in W_h^m,\ \sum_{|\beta|=j}\|w_h^\beta\|_{0,\mu,\Omega^k}\leqslant C\|w_h\|_{m,\sigma,\Omega}, h\in(0,1). \quad (7.1.16)$$

定理 7.1.3 是 Sobolev 嵌入定理的推广. 要上式对一个与 h 有关的常数成立是容易的，关键是要与 h 无关，所谓推广就是沿 $h\to 0$ 的方向，下面的紧致定理也是 Sobolev 空间的紧致定理按这个意义的推广.

定理 7.1.4 (紧致定理)　令 $m=1$ 或 $m=n=2$, $\sigma\in(1,\infty)$. 设 H_m 成立，对于 $j\in\{0,\cdots,m-1\}$, 假设当 $n>(m-j)\sigma$ 时，

$$n-(m-j)\sigma < k \leqslant n, \sigma \leqslant \mu < \frac{k\sigma}{n-(m-j)\sigma};$$

当 $n=(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$，$\sigma\leqslant\mu<\infty$；当 $n<(m-j)\sigma$ 时，$k\in\{1,\cdots,n\}$，$\sigma\leqslant\mu\leqslant\infty$。则对任意在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中有界的序列 $u_\tau\in W^{h_\tau m}$，$\tau\in\mathrm{N}$，如果

$$\lim_{\tau\to\infty} h_\tau = 0,$$

就存在 N 的子列 N′ 和 $u_\infty\in W^{m,\sigma}(\Omega)$，使得 $\{u_\tau\}_{\tau\in\mathrm{N}'}$ 弱收敛于 u_∞，且

$$\lim_{\tau\to\infty,\tau\in\mathrm{N}'}\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta u_\infty - u_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}k = 0.$$

若将 $W^m_{h_\tau}$和 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 分别换成 $\mathring{W}^m_{h_\tau}, \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$，上述结论仍然成立。

上面的弱闭性定理，逼近性定理，嵌入定理和紧致定理的建立，为有限元方法求解微分方程的问题的收敛性奠定了基础。一般有限元解的收敛性归结为三个条件：泛函的弱强制性，有限元空间的逼近性，有限元空间的弱闭性。泛函的弱强制性由嵌入定理和紧致定理可以得到。下面给出定理 7.1.4 推出的著名的 Poincarè 和 Friedrichs 不等式的推广形式。

定理 7.1.5 设 $1<\sigma<\infty$，$m=1$ 或 2，H_m 成立。则存在与 h 无关的常数C_1, C_2, C_3 使得广义 Poincarè-Friedrichs 不等式

$$u_h\in\mathring{W}^m_h,\ \|u_h\|_{m,\sigma,\Omega}\leqslant C_1|u_h|_{m,\sigma,\Omega}, \tag{7.1.17}$$

广义 Poincarè 不等式

$$u_h\in W^m_h,\ \|u_h\|^\sigma_{m,\sigma,\Omega}\leqslant C_2\left(|u_h|^\sigma_{m,\sigma,\Omega}+\sum_{|\beta|<m}\left(\int_\Omega u_h^\beta dx\right)^\sigma\right), \tag{7.1.18}$$

和广义 Friedrichs 不等式

$$u_h\in W^m_h, \|u_h\|_{m,\sigma,\Omega}\leqslant C_3(|u_h|_{m,\sigma,\Omega}+\|u_h^0\|_{0,\sigma,\partial\Omega}), \tag{7.1.19}$$

对足够小的 h 一致成立。

上面所有引理和定理的证明将在本章的剩余部份给出，如对

证明不兴趣的读者，到此可以直接读第八章。

§7.2 引理和逼近性定理的证明

本节将给出第一节中的引理和逼近性定理的证明。为了证明它们，还要建立一些引理，这些引理本身也是有意义的。本节总假定 $\{K_h\}$ 满足假设 K1—K3。

引理 7.2.1 $\forall r\in\mathrm{N}+\{0\},\mu,\nu\in[1,\infty]$，存在只与 r,μ,ν 和 n 有关的常数 C 使得

$$p\in P_r(K),\ |p|_{t,\mu,K}\leqslant Ch^{\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\nu}-t+s}|p|_{s,\nu,K}. \tag{7.2.1}$$

$\forall t\geqslant s\in\{0\}+\mathrm{N},\forall K\in K_h,\forall h\in(0,1)$ 一致成立。

证明 利用(5.2.5)和(5.2.6)，(5.2.2)和(5.2.3)及 K3，可以证得：$\forall p\in P_r(K)$，

$$\begin{cases}|p|_{t,\mu,K}\leqslant Ch^{\frac{n}{\mu}-t}|\hat{p}|_{t,\mu,\hat{K}},\\ |\hat{p}|_{s,\nu,\hat{K}}\leqslant Ch^{-\frac{n}{\nu}+s}|p|_{s,\nu,K}.\end{cases} \tag{7.2.2}$$

显然 $|\cdot|_{s,\nu,\hat{K}}$ 和

$$\sum_{i=s}^{t}|\cdot|_{i,\mu,K}$$

都是商空间 $P_r(\hat{K})/P_{s-1}(\hat{K})$ 的范数。这里 $P_{-1}(K)=\{0\}$。由有限维空间各范数的等价性可得，$\forall\hat{p}\in P_r(\hat{K})$，记 $\{\hat{p}\}$ 是 $\hat{p}$ 在商空间对应的元素，则

$$\begin{aligned}|\hat{p}|_{t,\mu,K}&\leqslant\sum_{i=s}^{t}|\{\hat{p}\}|_{i,\mu,\hat{K}}\leqslant C|\{\hat{p}\}|_{s,\nu,\hat{K}}\\&=C\inf_{q\in P_{s-1}(K)}|\hat{p}-q|_{s,\nu,\hat{K}}=C|\hat{p}|_{s,\nu,\hat{K}}.\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

由(7.2.2)和(7.2.3)式可得(7.2.1)式。证毕。

引理 7.1.1 的证明 (7.1.1)式当 $j=0$ 时是显然的。考虑 $j=1$ 的情形。取 $p\in N_K^q(i=1,\cdots,n)$。对 $\forall u\in C^1(K)$，注意 $\Pi_K^q u\in N_K^q$，则引理 7.2.1 给出

$$\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu,K}^2 \leqslant C h^{2n\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right)} \|p-\Pi_K^e u\|_{0,2,K}^2. \qquad (7.2.4)$$

由 Green 公式和(5.3.5)式得

$$\|p-\Pi_K^e u\|_{0,2,K}^2 = \int_K (p-\Pi_K^e u)(p-\Pi_K^e u)dx$$

$$= \int_K (p-\Pi_K^e u)(p-D^{e_i}u)dx$$

$$+ \int_K (p-\Pi_K^e u)(D^{e_i}u-\Pi_K^e u)dx$$

$$= \int_K (p-\Pi_K^e u)(p-D^{e_i}u)dx$$

$$+ \int_{\partial K} (p-\Pi_K^e u)(u-\Pi_{\partial K} u)N_i ds$$

$$- \int_K D^{e_i}(p-\Pi_K^e u)(u-\Pi_K^0 u)dx.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\|p-\Pi_K^e u\|_{0,2,K}^2 \leqslant \|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu',K}\|D^{e_i}u-p\|_{0,\mu,K}$$

$$+ \|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu',\partial K}\|u-\Pi_{\partial K} u\|_{0,\mu,\partial K}$$

$$+ |p-\Pi_K^e u|_{1,\mu',K}\|u-\Pi_K^0 u\|_{0,\mu,K}.$$

再由引理 7.2.1，有下述各不等式

$$\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu',K} \leqslant C h^{\frac{n}{\mu'}-\frac{n}{\mu}}\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu,K},$$

$$\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu',\partial K} \leqslant C h^{\frac{n-1}{\mu'}}\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\infty,K}$$

$$\leqslant C h^{\frac{n-1}{\mu'}-\frac{n}{\mu}}\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu,K},$$

$$|p-\Pi_K^e u|_{1,\mu',K} \leqslant C h^{\frac{n}{\mu'}-\frac{n}{\mu}-1}\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu,K}.$$

因而得

$$|p-\Pi_K^e u|_{0,2,K}^2 \leqslant C|p-\Pi_K^e u|_{0,\mu,K}\{h^{\frac{n}{\mu'}-\frac{n}{\mu}}\|D^{e_i}u-p\|_{0,\mu,K}$$

$$+ h^{\frac{n-1}{\mu'}-\frac{n}{\mu}}\|u-\Pi_{\partial K} u\|_{0,\mu,\partial K}$$

$$+ h^{\frac{n}{\mu'}-\frac{n}{\mu}-1}|u-\Pi_K^0 u|_{0,\mu,K}\}.$$

将上式代入(7.2.4)式，消去两边的 $\|p-\Pi_K^e u\|_{0,\mu,K}$ 可得

$$\|p - \Pi_K^{e_i} u\|_{0,\mu,K} \leqslant C\{\|D^{e_i}u - p\|_{0,\mu,K} + h^{-\frac{1}{\mu'}}\|u - \Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}$$
$$+ h^{-1}\|u - \Pi_K^0 u\|_{0,\mu,K}\}.$$

注意 $\|D^{e_i}u - \Pi_K^{e_i}u\|_{0,\mu,K} \leqslant \|D^{e_i}u - p\|_{0,\mu,K} + \|p - \Pi_K^{e_i}u\|_{0,\mu,K}$ 和 p 的任意性,可得

$$\|D^{e_i}u - \Pi_K^{e_i}u\|_{0,\mu,K} \leqslant C\{\min_{p\in N_K^{e_i}}\|D^{e_i}u - p\|_{0,\mu,K}$$
$$+ h^{-1}\|u - \Pi_K^0 u\|_{0,\mu,K}$$
$$+ h^{-\frac{1}{\mu'}}\|u - \Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}\}.$$

于是(7.1.1)式为真.

用类似的方法可以证明(7.1.2)式. 证毕.

引理 7.2.2 设 r 是非负整数, $\sigma\in[1,\infty]$, G是一多胞形. 则存在常数 $C(G)$ 使得

$$\forall v\in W^{r+1,\sigma}(G), \inf_{p\in P_r(G)}(\|v+p\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v+p\|_{r+1,\sigma,G})$$
$$\leqslant C(G)|v|_{r+1,\sigma,G}. \tag{7.2.5}$$

证明 记L是 $P_r(G)$ 的维数,令 $f_i, 1\leqslant i\leqslant L$, 是 $P_r(G)$ 的对偶空间的一组基. 由 Hahn-Banach 延拓定理, 存在定义在空间 $W^{r+1,\sigma}(G)$ 上的线性连续形式,仍然记为 $f_i(1\leqslant i\leqslant L)$,它具有性质: $\forall p\in P_r(G)$, $f_i(p)=0$, $1\leqslant i\leqslant L$, 的充要条件是 $p=0$. 下面将证明存在常数 $C(G)$ 使得

$$\forall v\in W^{r+1,\sigma}(G), \|v\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v\|_{r+1,\sigma,G}$$
$$\leqslant C(G)\Big(|v|_{r+1,\sigma,G} + \sum_{i=1}^{L}|f_i(v)|\Big). \tag{7.2.6}$$

如果(7.2.6)式为真, 那么 $\forall v\in W^{r+1,\sigma}(\Omega)$, 令 $q\in P_r(G)$ 满足 $f_i(v+q)=0, 1\leqslant i\leqslant L$, 于是由(7.2.6)式得

$$\inf_{p\in P_r(G)}(\|v+p\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v+p\|_{r+1,\sigma,G}) \leqslant \|v+q\|_{r+1,\sigma,G}$$
$$\leqslant C(G)|v|_{r+1,\sigma,G},$$

于是(7.2.5)式成立.

用反证法证明(7.2.6)式. 如果(7.2.6)式不成立,则存在

$$\{v_m\}_{m=1}^{\infty}\subset W^{r+1,\sigma}(G),$$

使得对 $m \geqslant 1$，$\|v_m\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v_m\|_{r+1,\sigma,G} = 1$，且

$$\lim_{m\to\infty}\left(|v_m|_{r+1,\sigma,G} + \sum_{i=1}^{L} |f_i(v_m)| \right) = 0,$$

由于 $\{v_m\}$ 是 $W^{r+1,G}(G)$ 的有界序列，Rellich 紧致定理说明，存在 $\{v_m\}$ 的子列（仍记为 $\{v_m\}$）和 $v \in W^{r+1,\sigma}(G)$，使得 $\{v_m\}$ 弱收敛于 v 且

$$\lim_{m\to\infty}\|v_m - v\|_{r,\sigma,G} = 0.$$

因为

$$\lim_{m\to\infty}|v_m|_{r+1,\sigma,G} = 0,$$

所以$\{v_m\}$是 $W^{r+1,\sigma}(G)$ 的 Cauchy 序列。因而$\{v_m\}$在 $W^{r+1,\sigma}(G)$ 中收敛于 v。于是 $\|v\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v\|_{r+1,\sigma,G} = 1$ 且 $|v|_{r+1,\sigma,G} = 0$，$f_i(v) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant L$。 由 $|v|_{r+1,\sigma,G} = 0$ 可知 $v \in P_r(G)$，$f_i(v) = 0$ 说明 $v = 0$。与 $\|v\|_{0,\sigma,\partial G} + \|v\|_{r+1,\sigma,G} = 1$ 矛盾。所以(7.2.6)成立。证毕。

引理 7.2.3 设 r 是非负整数，$1 \leqslant \sigma \leqslant \infty$，则存在与 K, h 无关的常数 C 使得

$$\inf_{p\in P_r(K)} |v - p|_{s,\sigma,K} \leqslant Ch^{r+1-s}|v|_{r+1,\sigma,K}, \quad \forall v \in W^{r+1,\sigma}(K), \tag{7.2.7}$$

对 $s = 0,1,\cdots,r+1$，$\forall K \in K_h, h \in (0,1)$ 一致成立，

$$\inf_{p\in P_r(K)} \|v - p\|_{0,\sigma,\partial K} \leqslant Ch^{r+\frac{1}{\sigma'}}|v|_{r+1,\sigma,K}, \quad \forall v \in W^{r+1,\sigma}(K), \tag{7.2.8}$$

$\forall K \in K_h, \forall h \in (0,1)$ 一致成立。

证明 利用关于 K_h 的假设 K3，(5.2.2)和(5.2.3)式及(5.2.5)和(5.2.6)式可得

$$\inf_{p\in P_r(K)} |v - p|_{s,\sigma,K} \leqslant Ch^{-s+\frac{n}{\sigma}} \inf_{\hat{p}\in P_r(\hat{K})} |\hat{v} - \hat{p}|_{s,\sigma,\hat{K}},$$

$$|\hat{v}|_{r+1,\sigma,\hat{K}} \leqslant Ch^{r+1-\frac{n}{\sigma}}|v|_{r+1,\sigma,K}. \tag{7.2.9}$$

再利用(7.2.5)式则得(7.2.7)式。利用(5.2.2)和(5.2.3)式及(5.2.19)

和(5.2.20)式可得

$$\inf_{p \in P_r(K)} \|v - p\|_{0,\sigma,\partial K} \leqslant C h^{\frac{n-1}{\sigma}} \inf_{\hat{p} \in P_r(\hat{K})} \|\hat{v} - \hat{p}\|_{0,\sigma,\partial \hat{K}}.$$

再用(7.2.5)和(7.2.9)式可直接得到(7.2.8)式。

引理 7.1.2 的证明 现在证明(7.1.3)式。记 $S(\eta) = \{K | K \in \mathscr{K}, |K| = |\hat{K}|$ 且 $\rho_K \geqslant \eta h_K\}$。首先存在与$K$无关的常数$C$使得

$$u \in W^{r_1+1,\sigma}(K),\ \sum_{j=0}^{1} \|\Pi_K^0 u\|_{j,\mu j,K} \leqslant C \|u\|_{r_1+1,\sigma,K}. \quad (7.2.10)$$

$\forall K \in S(\eta)$ 一致成立。如果(7.2.10)式不成立，那么对 $m \in \mathrm{N}$，存在 $K_m \in S(\eta)$ 和 $u_m \in W^{r_1+1,\sigma}(K_m)$ 使得

$$\sum_{j=0}^{1} \|\Pi_{K_m}^0 u_m\|_{j,\mu j,K_m} > m \|u_m\|_{r_1+1,\sigma,K_m} \quad (7.2.11)$$

成立。不妨设

$$\|\phi_{K_m}^1(u_m)\|^2 = \sum_{j=1}^{M} |\phi_{j,K_m}(u_m)|^2 = 1, m \in \mathrm{N}.$$

由于 $K_m \in S(\eta)$，从(5.2.2)式和(5.1.3)式知，$\{B_{K_m}\}$ 和 $\{B_{K_m}^{-1}\}$ 是矩阵空间的有界集。所以不妨设 B_{K_m} 收敛于某个非奇阵 $B_K(K \in \mathscr{K})$，$\phi_{K_m}^1(u_m)$ 收敛于某个 $\phi \in R^M$，显然 $\|\phi\| = 1$。

由 Σ_K^1 的仿射连续性可知，$\|\Pi_{K_m}^0 u_m\|_{j,\mu j,K_m}$ 有界。于是(7.2.11)式给出

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m\|_{r_1+1,\sigma,K_m} = 0.$$

利用引理 5.2.1 得

$$\|\hat{u}_m\|_{r_1+1,\sigma,\hat{K}} \leqslant C \|u_m\|_{r_1+1,\sigma,K_m}.$$

因而

$$\lim_{m \to \infty} \|\hat{u}_m\|_{r_1+1,\sigma,\hat{K}} = 0.$$

注意到 $\hat{\phi}_{j,K_m}$ 在 $C^{s_1}(\hat{K})$ 的对偶空间中收敛于 $\hat{\phi}_{j,K}$，由嵌入定理 $W^{r_1+1,\sigma}(\hat{K}) \hookrightarrow C^{s_1}(\hat{K})$，$\hat{\phi}_{j,K_m}$ 是 $W^{r_1+1,\sigma}(\hat{K})$ 的对偶空间中的有界序列。进而

$$|\hat{\phi}_{i,K_m}(\hat{u}_m)| \leqslant \|\hat{\phi}_{i,K_m}\|\|\hat{u}_m\|_{r_1+1,\sigma,\hat{K}} \to 0.$$

故

$$\lim_{m\to\infty}\hat{\phi}_{i,K_m}(\hat{u}_m) = \lim_{m\to\infty}\phi_{i,K_m}(u_m) = \phi = 0,$$

与 $\|\phi\| = 1$ 矛盾，因而(7.2.10)式为真。

第二，$\forall K \in S(\eta)$，由(7.2.10)式和 Sobolev 嵌入定理得

$$\sum_{j=0}^{1}\|u - \Pi_K^0 u\|_{j,\mu_j,K} = \inf_{p\in P_{r_1}(K)}\sum_{j=0}^{1}\|(u-p) - \Pi_K^0(u-p)\|_{j,\mu_j,K}$$
$$\leqslant C\inf_{p\in P_{r_1}(K)}\|u-p\|_{r_1+1,\sigma,K}.$$

利用(5.2.2)，(5.2.3)，(5.2.5)和(5.2.6)式及 $S(\eta)$ 的定义可以得到，$\forall K\in S(\eta)$，有

$$\|u-p\|_{r_1+1,\sigma,K} \leqslant C\|\hat{u}-\hat{p}\|_{r_1+1,\sigma,\hat{K}}$$
$$|\hat{u}|_{r_1+1,\sigma,K} \leqslant C|u|_{r_1+1,\sigma,K}.$$

在引理 7.2.2 中令 $r = r_1, G = \hat{K}$ 可得

$$\forall u \in W^{r_1+1,\sigma}(K), K\in S(\eta),\quad \sum_{j=0}^{1}\|u - \Pi_K^0 u\|_{j,\mu_j,K} \leqslant C|u|_{r_1+1,\sigma,K}. \tag{7.2.12}$$

最后，$\forall K \in K_h$，令 $\theta_K = (|\hat{K}|/|K|)^{1/n}$，$\tilde{K} = \{\tilde{x}\,|\,\tilde{x} = \theta_K x, \forall x\in K\}$，则 $\tilde{K}\in S(\eta)$。由 Σ_K^1 的尺度不变性和(7.2.12)式得，当 $j = 0,1$ 时

$$|u - \Pi_K^0 u|_{j,\mu_j,K} = \theta_K^{-n/\mu_j+j}|\tilde{u} - \Pi_{\tilde{K}}^0\tilde{u}|_{j,\mu_j,\tilde{K}}$$
$$\leqslant C\theta_K^{-n/\mu_j+j}|\tilde{u}|_{r_1+1,\sigma,\tilde{K}}$$
$$= C\theta_K^{-\frac{n}{\mu_j}+\frac{n}{\sigma}-r_1-1+j}|u|_{r_1+1,\sigma,K}.$$

注意 $\rho_{\hat{K}}/h_K \leqslant \theta_K \leqslant h_{\hat{K}}/\rho_K$，即 θ_K 是 h^{-1} 量级，所以(7.1.3)式成立。

用类似的方法，可以证明(7.1.4)～(7.1.8)式。引理 7.1.2 得证。

定理 7.1.1 的证明　首先考虑 $m = 1$ 的情形。Σ_K^1 对 $\sigma\in(1,\infty)$ 具有逼近性时，对 $\sigma = \infty$，逼近性也成立。$\forall\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega})$，在

(7.1.3)式中,令 $\mu_0 = \infty$. $\sigma = \infty$, 于是

$$\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\mu,\Omega^k} \leqslant C\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\infty,\Omega^k} \leqslant C\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\infty,\Omega}.$$

记 $K \in K_h$ 是使得 $\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\infty,\Omega} = \|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\infty,K}$ 的单元,则

$$\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\mu,\Omega^k} \leqslant C\|\varphi - \Pi_K^0\varphi\|_{0,\infty,K} \leqslant Ch^{r_1+1}|\varphi|_{r_1+1,\infty,K} \leqslant Ch^{r_1+1}|\varphi|_{r_1+1,\infty,\Omega}.$$

在(7.1.3),(7.1.4)和(7.1.1)式中取 $\mu = \sigma, \mu_0 = \sigma$, 可得

$$\|\varphi - \Pi_h^1\varphi\|_{1,\sigma,\Omega}^\sigma = \sum_{K \in K_h}\sum_{|\beta|=0}^{1}\|D^\beta\varphi - \Pi_K^\beta\varphi\|_{0,\sigma,K}^\sigma$$

$$\leqslant C\sum_{K \in K_h}\left\{\sum_{|\beta|=1}\min_{p \in N_K^\beta}\|D^\beta\varphi - p\|_{0,\sigma,K}^\sigma + \sum_{i=1}^{1}h^{\sigma r_i}|\varphi|_{r_i+1,\sigma,K}^\sigma\right\}.$$

再利用引理 7.2.3 得

$$\|\varphi - \Pi_h^1\varphi\|_{1,\sigma,\Omega} \leqslant C\sum_{i=1}^{1}h^{r_i}|\varphi|_{r_i+1,\sigma,\Omega}. \tag{7.2.13}$$

因而

$$\lim_{h\to 0}\{\|\varphi - (\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,\mu,\Omega^k} + \|\varphi - \Pi_h^1\varphi\|_{1,\sigma,\Omega}\} = 0.$$

$\forall w \in W^{1,\sigma}(\Omega)$,由 Sobolev 迹嵌入定理可知, $w|_{\Omega^k} \in L^\mu(\Omega^k)$.

由 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{1,\sigma}(\Omega)$ 中的稠密性可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在$\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 使得

$$\|w - \varphi\|_{0,\mu,\Omega^k} + \|w - \varphi\|_{1,\sigma,\Omega} < \varepsilon.$$

于是由(7 2.13)式得

$$\lim_{h\to 0}\inf_{w_h \in W_h^1}(\|w - w_h^0\|_{0,\mu,\Omega^k} + \|w - w_h\|_{1,\sigma,\Omega})$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0}\{\|w - \varphi\|_{0,\mu,\Omega^k} + \|w - \varphi\|_{1,\sigma,\Omega} + \inf_{w_h \in W_h^1}(\|\varphi - w_h^0\|_{0,\mu,\Omega^k} + \|\varphi - w_h\|_{1,\sigma,\Omega})\} \leqslant \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{h\to 0}\inf_{w_h\in W_h^1}(\|w-w_h^0\|_{0,\mu,\Omega}^k+\|w-w_h\|_{1,\sigma,\Omega})=0.$$

若 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $\Pi_h^1\varphi\in\mathring{W}_h^1$，而 $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)$ 中稠密，重复上述步骤便可得:

$$\forall w\in\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega),\ \lim_{h\to 0}\inf_{w_h\in\mathring{W}_h^1}(\|w-w_h^0\|_{0,\mu,\Omega}^k$$
$$+\|w-w_h\|_{1,\sigma,\Omega})=0.$$

定理 7.1.1 的结论在 $m=1$ 时成立。

对于 $m=n=2$ 的情形类似地可证。具体证明留给读者做练习。证毕。

引理 7.2.4 令 $m=1$ 或 2，设 Σ_K^m 具有仿射连续性。对 $K_\tau\in\mathscr{K}$，$u_\tau\in C^{s_m}(K_\tau)$，$\tau\in\{0\}+\mathrm{N}$，如果

$$\lim_{\tau\to\infty}\|\phi_{K_\tau}^m(u_\tau)-\phi_{K_0}^m(u_0)\|=\lim_{\tau\to\infty}\|B_{K_\tau}-B_{K_0}\|=0,$$

则对 $|\beta|\leqslant m$，$\widehat{\Pi_{K_\tau}^\beta u_\tau}$ 一致收敛 $\widehat{\Pi_{K_0}^\beta u_0}$。

证明 引理的结论在 $\beta=0$ 时是不言而喻的。对 $\beta=e_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。在(5.3.5)或(5.4.1)的第一个式子中做坐标变换 $x=B_{K_\tau}\hat{x}+b_{K_\tau}$，利用导数链法则和(5.2.14)及(5.2.15)式可得

$$\int_{\hat{K}}\widehat{p_{l,K_\tau}^{e_i}}\widehat{\Pi_{K_\tau}^{e_i}u_\tau}|\det B_{K_\tau}|d\hat{x}=\int_{\partial K}\widehat{p_{l,K_\tau}^{e_i}}\widehat{\Pi_{\partial K_\tau}u_\tau}(B_{K_\tau}^{-T}\hat{N})_i|\det B_{K_\tau}|d\hat{s}$$
$$-\int_{\hat{K}}(B_{K_\tau}^{-T}D_{\hat{x}}\widehat{p_{l,K_m}^{e_i}})_i\widehat{\Pi_{K_\tau}^0u_\tau}|\det B_{K_\tau}|d\hat{x}.$$

由此可以看出 $A_{K_\tau}^1$ 收敛于 $A_{K_0}^1$，$Q_{K_\tau}^1$ 收敛于 $Q_{K_0}^1$。所以 $\zeta_{K_\tau}^1(u_\tau)$ 收敛于 $\zeta_{K_0}^1(u_0)$，进而 $\widehat{\Pi_{K_\tau}^{e_i}u_\tau}$ 一致收敛于 $\widehat{\Pi_{K_0}^{e_i}u_0}$。

对 $|\beta|=2$，用类似的方法也可以证得引理结论。证毕。

引理 7.1.3 的证明 (1)仍记 $S(\eta)=\{K\,|\,K\in\mathscr{K},|K|=|\hat{K}|$，且 $\rho_K\geqslant\eta h_K\}$。首先存在与 K 无关的常数 C 使得

$$\forall u\in C^{s_1}(K),\ |\Pi_K^0u|_{1,\mu,K}+\|\Pi_K^0u-\Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,\partial K}$$
$$\leqslant C\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\mu,K},\tag{7.2.14}$$

$\forall K\in S(\eta)$ 成立。若不然，对 $\tau\in\mathrm{N}$，存在 $K_\tau\in S(\eta)$，$u_\tau\in C^{s_1}(K_\tau)$

满足

$$|\Pi^0_{K_\tau}u_\tau|_{1,\mu,K_\tau}+\|\Pi^0_{K_\tau}u_\tau-\Pi_{\partial K_\tau}u_\tau\|_{0,\mu,\partial K_\tau}$$

$$>\tau\sum_{|\beta|=1}|\Pi^\beta_{K_\tau}u_\tau|_{0,\mu,K_\tau}. \qquad (7.2.15)$$

由于 $p\in P_0(K_\tau)$，$\Pi^0_{K_\tau}p=p$，$\Pi^{e_i}_{K_\tau}p=0$，$\Pi_{\partial K_\tau}p=p|_{\partial K_\tau}$，则从 $\Pi^\beta_{K_\tau},\Pi_{\partial K_\tau}$ 的线性性质,可以令

$$\|\phi^1_{K_\tau}(u_\tau)\|=1,\ \phi^1_{K_\tau}(u_\tau)\perp\phi^1_{K_\tau}(1). \qquad (7.2.16)$$

由 $S(\eta)$ 的定义和(5.2.2)可得

$$\|B_K\|\leqslant C,\|B_K^{-1}\|\leqslant C,\ \forall K\in S(\eta). \qquad (7.2.17)$$

所以不妨令 $\{\phi^1_{K_\tau}(u_\tau)\},\{B_{K_\tau}\}$ 是收敛的。因而存在 $K_0\in\mathscr{K}$ 及 $u_0\in C^{s_1}(K_0)$ 使得

$$\lim_{\tau\to\infty}\|\phi^1_{K_\tau}(u_\tau)-\phi^1_{K_0}(u_0)\|=\lim_{\tau\to\infty}\|B_{K_\tau}-B_{K_0}\|=0.$$

显然，$\|\phi^1_{K_0}(u_0)\|=1$。因为 $B_{K_\tau}\to B_{K_0}$，所以 $\widehat{\phi_{i,K_\tau}}\to\widehat{\phi_{i,K_0}}$。故对 $i=1,\cdots,M_1$，有

$$\lim_{\tau\to\infty}\widehat{\phi_{i,K_\tau}}(1)=\widehat{\phi_{i,K_0}}(1).$$

从(7.2.16)可得

$$\phi^1_{K_0}(u_0)\perp\phi^1_{K_0}(1). \qquad (7.2.18)$$

另一方面，Σ^1_K 具有仿射连续性，由引理 7.2.4 给出,(7.2.15)式的左端一致有界,所以 $\widehat{\Pi^{e_i}_{K_\tau}u_\tau}$ 一致收敛于 0。再由引理 7.2.4 得到 $\Pi^{e_i}_{K_0}u_0=0$，$1\leqslant i\leqslant n$。由(5.3.11)式得

$$Q^1_{K_0}\phi^1_{K_0}(u_0)=0.$$

单元秩条件说明，方程 $Q^1_{K_0}\phi=0$ 的解空间是一维的,又 $\phi^1_{K_0}(1)\neq0$属于解空间,所以 $\phi^1_{K_0}(u_0)=\xi\phi^1_{K_0}(1)$。(7.2.18)式说明$\phi^1_{K_0}(u_0)=0$。这与 $\|\phi^1_{K_0}(u_0)\|=1$ 矛盾，所以(7.2.14)式为真。

$\forall K\in K_h$，令

$$\theta_K=(|\hat{K}|/|K|)^{\frac{1}{n}},\ \widetilde{K}=\{\tilde{x}|\tilde{x}=\theta_Kx,\ \forall x\in K\}.$$

则 $\widetilde{K}\in S(\eta)$。由尺度不变性和(7.2.14)式可得

$$|\Pi_K^0 u|_{1,\mu,K} = \theta_K^{-\frac{n}{\mu}}\theta_K|\Pi_{\hat{K}}^0\tilde{u}|_{1,\mu,\hat{K}} \leqslant C\theta_K^{-\frac{n}{\mu}}\theta_K \sum_{|\beta|=1}\|\Pi_{\hat{K}}^\beta\tilde{u}\|_{0,\mu,\hat{K}},$$

$$\|\Pi_K^0 u - \Pi_{\partial K}u\|_{0,\mu,K} = \theta_K^{-\frac{n-1}{\mu}}\|\Pi_{\hat{K}}^0\tilde{u} - \Pi_{\partial\hat{K}}\tilde{u}\|_{0,\mu,\partial\hat{K}}$$
$$\leqslant C\theta_K^{-\frac{n-1}{\mu}}\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_{\hat{K}}^\beta\tilde{u}\|_{0,\mu,\hat{K}}.$$

而且 $\Pi_{\hat{K}}^\beta\tilde{u} = \theta_K^{-|\beta|}\Pi_K^\beta u$, $|\beta| \leqslant 1$. 所以(7.1.9)和(7.1.10)式成立。

(2) 对 $\xi > 0$，存在与 K, K' 无关的常数 C，使得

$$\|\Pi_{\partial K}w - \Pi_{\partial K'}w\|_{0,\mu,F}$$
$$\leqslant C\sum_{|\beta|=1}(\|\Pi_K^\beta w\|_{0,\mu,K} + \|\Pi_{K'}^\beta w\|_{0,\mu,K'}), \quad (7.2.19)$$

$\forall w \in C^{\prime 1}(K \cup K')$ 及这样的 $K, K' \in \mathscr{K}$ 一致成立：$F = K \cap K'$ 是公共 $(n-1)$ 维表面，$|K| = |\hat{K}|$, $h_K \leqslant \xi$, $h_{K'} \leqslant \xi$, $\rho_K \geqslant \xi^{-1}h_K$, $\rho_{K'} \geqslant \xi^{-1}h_{K'}$.

如果上述结论不对，则对 $\tau \in \mathrm{N}$，存在 $K_\tau, K'_\tau \in \mathscr{K}$, $K_\tau \cap K'_\tau = F_\tau$ 是公共 $(n-1)$ 维表面，$|K_\tau| = |\hat{K}|$，$\max\{h_{K_\tau}, h_{K'_\tau}\} \leqslant \xi$, $\rho_{K_\tau} \geqslant \xi^{-1}h_{K_\tau}$, $\rho_{K'_\tau} \geqslant \xi^{-1}h_{K'_\tau}$，以及 $w_\tau \in C^{\prime 1}(K_\tau \cup K'_\tau)$. 使得

$$\|\Pi_{\partial K_\tau}w_\tau - \Pi_{\partial K'_\tau}w_\tau\|_{0,\mu,F_\tau}$$
$$> \tau\sum_{|\beta|=1}(\|\Pi_{K_\tau}^\beta w_\tau\|_{0,\mu,K_\tau} + \|\Pi_{K'_\tau}^\beta w_\tau\|_{0,\mu,K'_\tau}). \quad (7.2.20)$$

与(1)类似，不妨令当 $\tau \in \mathrm{N}$ 时，有

$$\|\phi_{K_\tau}^1(w_\tau|_{K_\tau})\|^2 + \|\phi_{K'_\tau}^1(w_\tau|_{K'_\tau})\|^2 = 1,$$
$$\phi_{K_\tau}^1(w_\tau|_{K_\tau}) \perp \phi_{K_\tau}^1(1), \quad (7.2.21)$$

而且存在 $K_0, K'_0 \in \mathscr{K}$ 及 $w_0 \in C^{\prime 1}(K_0 \cup K'_0)$ 使得 $F_0 = K_0 \cap K'_0$ 是公共 $(n-1)$ 维表面，且当 $\tau \to \infty$ 时，$\phi_{K_0}^1(w_\tau|_{K_\tau}) \to \phi_{K_0}^1(w_0|_{K_0})$, $\phi_{K'_\tau}^1(w_\tau|_{K'_\tau}) \to \phi_{K'_0}^1(w_0|_{K'_0})$, $B_{K_\tau} \to B_{K_0}$, $B_{K'_\tau} \to B_{K'_0}$. 进而 $\Pi_{K_0}^{e_i}w_0 = 0$, $\Pi_{K'_0}^0 w_0 = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 所以 $\phi_{K_0}^1(w_0|_{K_0}) = 0$, $\Pi_{K'_0}^0(w_0|_{K'_0}) \in P_0(K'_0)$, $\Pi_{K'_0}^0 w_0|_{\partial K'_0} = \Pi_{\partial K'_0}w_0$. 由弱连续性可知 $\phi_{F_0}(\Pi_{\partial K'_0}w_0|_{F_0}) = \phi_{F_0}(\Pi_{\partial K_0}w_0|_{F_0}) = 0$，故 $\Pi_{K'_0}^0 w_0 = 0$. 即 $\phi_{K'_0}^1(w_0|_{K'_0}) = 0$.

这与 $\|\phi^1_{K_0}(w_0|_{K_0})\| + \|\phi^1_{K_0'}(w_0|_{K_0'})\|^2 = 1$ 矛盾。所以(7.2.19)式成立。

利用(1)后半部分的方法，可从(7.2.19)式推出(7.1.11)成立。

(3) 利用(1)和(2)的方法可类似地证得(7.1.12)—(7.1.15)各式。证毕。

§7.3 弱 闭 性

本节讨论有限元空间的弱闭性和验证弱闭性的条件，在讨论过程中给出弱闭性定理的证明。设 X 是一个 Banach 空间，其范数记为 $\|\cdot\|_X$。对于 X 的一列闭子空间，X_0, X_h，$h \in (0,1)$。称 $\{X_h, X_0\}$ 具有弱闭性，若对 $v_\tau \in X_{h_\tau}, \tau \in \mathrm{N}$，当 v_τ 在 X 中弱收敛于 v_0 且 $h_\tau \to 0$ 时，得 $v_0 \in X_0$。

$\forall u \in L^{m,\sigma}(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(R^n)$，定义

$$T_{\beta,i}(\varphi, u) = \int_\Omega (D^{e_i}\varphi u^\beta + \varphi u^{\beta+e_i})dx,$$

$$i = 1, \cdots, n, |\beta| < m。\tag{7.3.1}$$

令 $V_h \subset L^{m,\sigma}(\Omega)$ 是一列有限维空间。称 $\{V_h, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验，如果 $\forall v_\tau \in V_{h_\tau}$，$\tau \in \mathrm{N}$，当 v_τ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中有界且 $h_\tau \to 0$ 时，下述等式

$$\lim_{\tau\to\infty} T_{\beta,i}(\varphi, v_\tau) = 0, i = 1, \cdots, n, |\beta| < m, \tag{7.3.2}$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 成立。称 $\{V_h, \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验，如果对 $\forall v_\tau \in V_{h_\tau}$，$\tau \in \mathrm{N}$，当 $\{v_\tau\}$ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中有界，$h_\tau \to 0$ 时，(7.3.2) $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^n)$ 成立。

引理 7.3.1 $\{V_h, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性的充要条件是通过广义分片检验。$\{V_h, \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性的充要条件是通过广义分片检验。

证明 对 $u \in L^{m,\sigma}(\Omega)$，由 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 的定义及 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 到 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 的对应和 Sobolev 空间的定义，$u \in W^{m,\sigma}(\Omega)$ 的充要条

件是

$$T_{\beta,i}(\varphi,u)=0,i=1,\cdots,n,|\beta|<m \qquad (7.3.3)$$

$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立. $u\in\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$ 的充要条件是(7.3.3)式 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ 成立.

如果 $\{V_h,W^{m,\sigma}(\Omega)\}$通过广义分片检验,那么$\forall v_\tau\in V_{h_\tau}$, $\tau\in$ N. 若 v_τ 弱收敛于 $v_0,h_\tau\to0$, 则对 $i=1,\cdots,n$, $|\beta|<m$, $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$T_{\beta,i}(\varphi,v_0)=\lim_{\tau\to\infty}T_{\beta,i}(\varphi,v_\tau)=0,$$

即 $v_0\in W^{m,\sigma}(\Omega)$. 于是 $\{V_h,W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 是弱闭的.

设 $\{V_h,W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性. 令 $v_\tau\in V_{h_\tau},\tau\in$ N, $\{v_\tau\}$ 是 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中有界序列, $h_\tau\to0$. $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, $i=1,\cdots,n,|\beta|<m$, 记 N′ 是 N 的子列,且

$$\lim_{\tau\in N',\tau\to\infty}|T_{\beta,i}(\varphi,v_\tau)|=\lim_{\tau\to\infty}\sup_{k\geq\tau}|T_{\beta,i}(\varphi,v_k)|.$$

显然 $\{v_\tau\}_{\tau\in N'}$ 是 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中的有界序列, 所以存在 N′ 的子列 N″ 和 $v_0\in W^{m,\sigma}(\Omega)$, 使得 $\{v_\tau\}_{\tau\in N''}$ 弱收敛于 v_0. 因而

$$\lim_{\tau\to\infty}\sup_{k\geq\tau}|T_{\beta,i}(\varphi,v_\tau)|=\lim_{\tau\in N'',\tau\to\infty}|T_{\beta,i}(\varphi,v_\tau)|=0,$$

所以 $\{V_h,W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验.

同样可以证明 $\{V_h,\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性与通过广义分片检验的等价性. 证毕.

广义分片检验的概念是由 Stummel[62] 对非协调元空间提出的,张鸿庆[44]把它推广到多套函数有限元空间, 本节取的是后者. 现在给出第五章构造的有限元空间通过广义分片检验的等价形式.

引理 7.3.2 设 Σ_K^1 具有仿射连续性, 尺度不变性,弱连续性和逼近性且满足单元秩条件, 则 $\{\mathring{W}_h^1,\mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验等价于: 对 $w_\tau\in C^{s_1}(\bar{\Omega}),D^\beta w_\tau|_{\partial\Omega}=0,|\beta|\leqslant1,\tau\in$ N, 若

$$\inf_\tau\|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau\|_{1,\sigma,\Omega}<\infty$$

且 $h_\tau\to0$ 则 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ 下式成立:

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{K\in K_{h_\tau}}\int_{\partial K}\varphi\Pi_{\partial K}w_\tau N_i ds=0, 1\leqslant i\leqslant n. \quad (7.3.4)$$

$\{W_h^1, W^{1,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验等价于：对 $w_\tau\in C^1(\bar{\Omega}), \tau\in\mathrm{N}$，若

$$\inf_\tau\|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau\|_{1,\sigma,\Omega}<\infty$$

且 $h_\tau\to 0$，则 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，(7.3.4)式成立。

证明 由 $\mathring{W}_h^1$ 的构造可知，$\{\mathring{W}_h^1, \mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验等价于：对 $w_\tau\in C^1(\bar{\Omega}), D^\beta w_\tau|_{\partial\Omega}=0, |\beta|\leqslant 1, \tau\in\mathrm{N}$，若

$$\inf_\tau\|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau\|_{1,\sigma,\Omega}<\infty,\ h_\tau\to 0,$$

则 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^n)$，下式为真：

$$\lim_{\tau\to\infty}T_{0,i}(\varphi, \Pi_{K_\tau}^1 w_\tau)=0, 1\leqslant i\leqslant n. \quad (7.3.5)$$

利用 Green 公式得

$$\begin{aligned}T_{0,i}(\varphi,\Pi_{K_\tau}^1 w_\tau)&=\sum_{K\in K_{h_\tau}}\int_K(D^{e_i}\varphi\Pi_K^0 w_\tau+\varphi\Pi_K^{e_i}w_\tau)dx\\&=\sum_K\left\{\int_K\varphi(\Pi_K^{e_i}w_\tau-D^{e_i}\Pi_K^0 w_\tau)dx\right.\\&\quad\left.-\int_{\partial K}\varphi(\Pi_{\partial K}w_\tau-\Pi_K^0 w_\tau)N_i ds\right\}\\&\quad+\sum_K\int_{\partial K}\varphi\Pi_{\partial K}w_\tau N_i ds.\end{aligned}$$

令 $p\in P_0(K)$，注意 $P_0(K)\subset N_K^{e_i}$，从(5.3.5)式得

$$\begin{aligned}T_{0,i}(\varphi,\Pi_{K_\tau}^1 w_\tau)&=\sum_K\left\{\int_K(\varphi-p)(\Pi_K^{e_i}w_\tau-D^{e_i}\Pi_K^0 w_\tau)dx\right.\\&\quad\left.-\int_{\partial K}(\varphi-p)(\Pi_{\partial K}w_\tau-\Pi_K^0 w_\tau)N_i ds\right\}\\&\quad+\sum_K\int_{\partial K}\varphi\Pi_{\partial K}w_\tau N_i ds. \quad (7.3.6)\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式，不等式(7.1.9)和(7.1.10)可得

$$\left|\int_K(\varphi-p)(\Pi_K^{e_i}w_\tau-D^{e_i}\Pi_K^0 w_\tau)dx\right|$$

$$\leqslant \|\varphi - p\|_{0,\sigma',K} \|\Pi_K^{e_i} w_\tau - D^{e_i}\Pi_K^0 w_\tau\|_{0,\sigma,K}$$

$$\leqslant C\|\varphi - p\|_{0,\sigma',K} \sum_{|\beta|=1} \|\Pi_K^\beta w_\tau\|_{0,\sigma,K},$$

$$\left|\int_{\partial K}(\varphi - p)(\Pi_{\partial K} w_\tau - \Pi_K^0 w_\tau) N_i ds\right| \leqslant$$

$$\|\varphi - p\|_{0,\sigma',\partial K} \|\Pi_{\partial K} w_\tau - \Pi_K^0 w_\tau\|_{0,\sigma,\partial K}$$

$$\leqslant C h^{1/\sigma'} \|\varphi - p\|_{0,\sigma',\partial K} \sum_{|\beta|=1} \|\Pi_K^\beta w_\tau\|_{0,\sigma,K}.$$

利用引理 7.2.3 可得

$$\inf_{p\in P_0(K)} \left|\int_K (\varphi - p)(\Pi_K^{e_i} w_\tau - D^{e_i}\Pi_K^0 w_\tau) dx\right.$$

$$\left. - \int_{\partial K}(\varphi - p)(\Pi_{\partial K} w_\tau - \Pi_K^0 w_\tau) ds\right|$$

$$\leqslant C\left\{\inf_{p\in P_0(K)} \|\varphi - p\|_{0,\sigma',K} + h^{\frac{1}{\sigma'}} \inf_{p\in P_0(K)} \|\varphi - p\|_{0,\sigma',\partial K}\right\}$$

$$\cdot \sum_{|\beta|=1} \|\Pi_K^\beta w_\tau\|_{0,\sigma,K}$$

$$\leqslant C h |\varphi|_{1,\sigma',K} \sum_{|\beta|=1} \|\Pi_K^\beta w_\tau\|_{0,\mu,K}.$$

因而

$$T_{0,i}(\varphi, \Pi_{h_\tau}^1 w_\tau) = O(h_\tau) + \sum_{K\in K_{h_\tau}} \int_{\partial K} \varphi \Pi_{\partial K} w_\tau N_i ds. \qquad (7.3.7)$$

所以(7.3.5)式成立等价于(7.3.4)式成立。

类似地，对 $\{W_h^1, W^{1,\sigma}(\Omega)\}$ 引理的结论也成立。

引理 7.3.3 设 Σ_K^2 具有仿射连续性，尺度不变性，弱连续性和逼近性且满足单元秩条件，则 $\{\mathring{W}_h^2, \mathring{W}^{2,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验等价于：对 $w_\tau \in C^{\infty}(\bar{\Omega}), D^\beta w_\tau|_{\partial\Omega} = 0, |\beta| \leqslant 2, \tau \in \mathrm{N}$，若

$$\inf_\tau \|\Pi_{h_\tau}^2 w_\tau\|_{2,\sigma,\Omega} < \infty$$

且 $h_\tau \to 0$，则对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^2)$ 下式成立

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{K\in K_{h_\tau}} \int_{\partial K} \varphi \begin{bmatrix} N_1^2 & -N_1N_2 \\ 2N_1N_2 & N_1^2 - N_2^2 \\ N_2^2 & N_1N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\partial K}^N w_\tau \\ \Pi_{\partial K}^s w_\tau \end{bmatrix} ds = 0. \qquad (7.3.8)$$

$\{W_h^2, W^{2,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验的充要条件是：对 $w_\tau \in C^2(\bar{\Omega})$，$\tau \in \mathrm{N}$，若

$$\inf_\tau \|\Pi_{h_\tau}^2 w_\tau\|_{2,\sigma,\Omega} < \infty, h_\tau \to 0,$$

则 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$，(7.3.8)式成立.

证明 由 $\mathring{W}_h^2$ 的构造可知，$\{\mathring{W}_h^2, \mathring{W}^{2,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验等价于：对 $w_\tau \in C^2(\bar{\Omega}), D^\beta w_\tau|_{\partial\Omega} = 0$，$|\beta| \leqslant 2$，$\tau \in \mathrm{N}$，若

$$\inf_\tau \|\Pi_{h_\tau}^2 w_\tau\|_{2,\sigma,\Omega} < \infty, h_\tau \to 0,$$

则 $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^2)$ 下式成立。

$$\lim_{\tau \to \infty} T_{\beta,i}(\varphi, \Pi_{h_\tau}^2 w_\tau) = 0,\ i = 1,2, |\beta| < 2. \tag{7.3.9}$$

对于 $i = 1,2$，利用引理 5.1.1和(7.1.14)得

$$\left|\sum_K \int_{\partial K} \varphi \Pi_{\partial K} w_\tau N_i ds\right| = \left|\sum_K \sum_{F \subset \partial K} \int_F \varphi \Pi_{\partial K} w_\tau N_i ds\right|$$

$$\leqslant C h_\tau \|\varphi\|_{1,\sigma',\Omega} |\Pi_{h_\tau}^2 w_\tau|_{2,\sigma,\Omega},$$

其中利用了不等式

$$\|\varphi\|_{0,\sigma',\partial K} \leqslant C h^{-\frac{1}{\sigma'}} \|\varphi\|_{1,\sigma,K}. \tag{7.3.10}$$

(7.3.10)式通过利用(5.2.19)和(5.2.20)式，(5.2.2)式和 Sobolev 嵌入定理不难得到. 由(7.3.7)式可得

$$\lim_{\tau \to \infty} T_{0,i}(\varphi, \Pi_{h_\tau}^2 w_\tau) = 0. \tag{7.3.11}$$

现在考虑 $|\beta| = 1$ 时的情形，对 $|\beta| = 1, i = 1,2$，如果

$$T_{\beta,i}(\varphi, \Pi_{h_\tau}^2 w_\tau) = O(h_\tau) + \zeta_\beta^i \sum_K \int_{\partial K} \varphi$$

$$\cdot \begin{bmatrix} N_1^2 & -N_1N_2 \\ 2N_1N_2 & N_1^2 - N_2^2 \\ N_2^2 & N_1N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{\partial K}^N w_\tau \\ \Pi_{\partial K}^s w_\tau \end{bmatrix} ds \tag{7.3.12}$$

成立，则引理的结论在 $\{\mathring{W}_h^2, \mathring{W}^{2,\sigma}(\Omega)\}$ 的情形下为真，其中 $\zeta_{e_1}^1 = (1,0,0), \zeta_{e_2}^2 = (0,0,1), \zeta_{e_1}^2 = \zeta_{e_2}^1 = (0,1,0)$. 现在证明(7.3.12).
利用 Green 公式得

$$
\begin{aligned}
2T_{e_1,e_2}(\varphi,\Pi^2_{h_\tau}w_\tau) &= 2\sum_K\int_K(\varphi\Pi_K^{e_1+e_2}w_\tau + D^{e_2}\varphi\Pi_K^{e_1}w_\tau)dx \\
&= \sum_K\Big\{\int_K\varphi(2\Pi_K^{(1,1)}w_\tau - D^{e_1}\Pi_K^{e_2}w_\tau - D^{e_2}\Pi_K^{e_1}w_\tau)dx \\
&\quad - \int_{\partial K}\varphi[(\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1 - \Pi^t_{\partial K}w_\tau N_2 - \Pi_K^{e_1}w_\tau)N_2 \\
&\quad + (\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2 + \Pi^t_{\partial K}w_\tau N_1 - \Pi_K^{e_1}w_\tau)N_1]ds\Big\} \\
&\quad + \sum_K\int_K(D^{e_2}\varphi\Pi_K^{e_1}w_\tau - D^{e_1}\varphi\Pi_K^{e_2}w_\tau)dx \\
&\quad + \sum_K\int_{\partial K}\varphi(2N_1N_2\Pi^N_{\partial K}w_\tau + (N_1^2 - N_2^2)\Pi^t_{\partial K}w_\tau)ds.
\end{aligned}
$$

由于 $P_0(K)\subset N_K^{(1,1)}$，利用(5.4.1)式得，$\forall p\in P_0(K)$，

$$
\begin{aligned}
2T_{e_1,e_2}(\varphi,\Pi^2_{h_\tau}w_\tau) &= \sum_K\Big\{\int_K(\varphi - p)(2\Pi_K^{(1,1)}w_\tau - D^{e_1}\Pi_K^{e_2}w_\tau \\
&\quad - D^{e_2}\Pi_K^{e_1}w_\tau)\,dx - \int_{\partial K}(\varphi - p)[(\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1 \\
&\quad - \Pi^t_{\partial K}w_2N_2 - \Pi_K^{e_1}w_\tau)N_2 + (\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2 + \Pi^t_{\partial K}w_\tau N_1 \\
&\quad - \Pi_K^{e_2}w_\tau)N_1]ds\Big\} + \sum_K\int_K[(D^{e_2}\varphi\Pi_K^{e_1}w_\tau + D^{(1,1)}\varphi\Pi_K^0w_\tau) \\
&\quad - (D^{e_1}\varphi\Pi_K^{e_2}w_\tau + D^{(1,1)}\varphi\Pi_K^0w_\tau)]dx \\
&\quad + \sum_K\int_{\partial K}\varphi(2N_1N_2\Pi^N_{\partial K}w_\tau + (N_1^2 - N_2^2)\Pi^t_{\partial K}w_\tau)ds.
\end{aligned}
$$

由不等式(7.1.13)和(7.1.14)可以推出

$$
\begin{aligned}
&\|\Pi_K^{e_1}w_\tau - (\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_1 - \Pi^t_{\partial K}w_\tau N_2)\|_{0,\sigma,\partial K} \\
&\qquad + \|\Pi_K^{e_2}w_\tau - (\Pi^N_{\partial K}w_\tau N_2 + \Pi^t_{\partial K}w_\tau N_1)\|_{0,\sigma,\partial K} \\
&\quad \leqslant Ch_\tau^{1/\sigma'}\sum_{|\beta|=2}\|\Pi_K^\beta w_\tau\|_{0,\sigma,K}.
\end{aligned}
\tag{7.3.13}
$$

利用引理 7.3.2 的证明方法，不等式(7.1.12)，(7.3.11)式及(7.3.13)可得

$$
\begin{aligned}
2T_{e_1,e_2}(\varphi,\Pi^2_{h_\tau}w_\tau) &= O(h_\tau) \\
&\quad + \sum_K\int_{\partial K}\varphi(2N_1N_2\Pi^N_{\partial K}w_\tau + (N_1^2 - N_2^2)\Pi^t_{\partial K}w_\tau)ds.
\end{aligned}
\tag{7.3.14}
$$

上式说明(7.3.12)在 $\beta=e_1, i=2$ 时为真。类似可以证明其它情形。

对于 $\{W_h^2, W^{2,\sigma}(\Omega)\}$，可以用类似的方法证明.引理 7.3.3 得证。

上面的讨论说明，有限元空间的弱闭性已经化成了单元边界上的插值函数的要求。下面将给出 F-E 检验，目的是将 K_h 上的整体检验化成两片单元和单片单元上的要求。这样有限元空间的弱闭性的检验就容易多了。F-E 检验是由石钟慈[15]针对非协调元提出的，王鸣将其推广到现在本书讨论的情形。

称 $\sum_K^1$ 通过 F-E 检验，如果 $\forall K\in\mathscr{K}, \Pi_{\partial K}$ 可以分为两部份：$\Pi_{\partial K}=\Pi_{\partial K}^F+\Pi_{\partial K}^E$，使得下述两条为真：1）存在与 K 无关的常数 C_1 和 $\varepsilon_1>0$，$\forall K_1, K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是 K_1 和 K_2 的公共 $(n-1)$ 维表面时，对 $\forall w\in C^{s_1}(K_1\cup K_2)$，下式为真：

$$\left|\int_F(\Pi_{\partial K_1}^F w-\Pi_{\partial K_2}^F w)ds\right|$$

$$\leqslant C_1 h_K^{\frac{n}{\sigma'}+\varepsilon_1}\sum_{|\beta|=1}(\|\Pi_{K_1}^\beta w\|_{0,\sigma,K_1}+\|\Pi_{K_2}^\beta w\|_{0,\sigma,K_2}), \quad (7.3.15)$$

其中 $h_K=\max(h_{K_1}, h_{K_2})$；2）$\forall w\in C^{s_1}(K)$，$i=1,\cdots,n$，有

$$\left|\int_{\partial K}\Pi_{\partial K}^E wN_i ds\right|\leqslant C_2 h_K^{\frac{n}{\sigma'}+\varepsilon_2}\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K}, \quad (7.3.16)$$

$$\int_{\partial K}|\Pi_{\partial K}^E w|_1^\sigma\cdot ds\leqslant C_3 h_K^{\varepsilon_3-1}\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K}^\sigma, \quad (7.3.17)$$

其中 C_i 和 ε_i 是与 K 无关的正常数。

类似地，称 $\sum_K^2$ 通过 F-E 检验，如果 $\forall K\in\mathscr{K}, \Pi_{\partial K}^N, \Pi_{\partial K}^s$ 分别分为两部份：$\Pi_{\partial K}^N=\Pi_{\partial K}^{NF}+\Pi_{\partial K}^{NE}$，$\Pi_{\partial K}^s=\Pi_{\partial K}^{sF}+\Pi_{\partial K}^{sE}$，而且满足：1）当 $K_1, K_2\in\mathscr{K}$，$F=K_1\cap K_2$ 是 K_1, K_2 的公共边时，$\forall w\in C^{s_2}(K_1\cup K_2)$，有

$$\left|\int_F(\Pi_{\partial K_1}^{NF}w+\Pi_{\partial K_2}^{NF}w)ds\right|+\left|\int_F(\Pi_{\partial K_1}^{sF}w+\Pi_{\partial K_2}^{sF}w)ds\right|$$

$$\leqslant C_4 h_K^{\frac{2}{\sigma'}+\varepsilon_4}\sum_{|\beta|=2}(\|\Pi_{K_1}^\beta w\|_{0,\sigma,K_1}+\|\Pi_{K_2}^\beta w\|_{0,\sigma,K_2}), \quad (7.3.18)$$

其中 C_4, ε_4 是与K无关的正常数；2)对 $\forall w \in C^{s_2}(K)$，下列各式成立：

$$\left|\int_{\partial K}(N_1^2 \Pi_{\partial K}^{NE} w - N_1 N_2 \Pi_{\partial K}^{sE} w) ds\right|$$
$$+ \left|\int_{\partial K}(2N_1 N_2 \Pi_{\partial K}^{NE} w + (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^{sE} w) ds\right|$$
$$+ \left|\int_{\partial K}(N_2^2 \Pi_{\partial K}^{NE} w + N_1 N_2 \Pi_{\partial K}^{sE} w) ds\right|$$
$$\leqslant C_5 h_K^{\frac{2}{\sigma'}+\varepsilon_5} \sum_{|\beta|=2} \|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K}. \tag{7.3.19}$$

$$\int_{\partial K}(|\Pi_{\partial K}^{NE} w|^\sigma + |\Pi_{\partial K}^{sE} w|^\sigma) ds$$
$$\leqslant C_6 h_K^{\varepsilon_6 - 1} \sum_{|\beta|=2} \|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K}^\sigma, \tag{7.3.20}$$

其中 C_i, ε_i 是与K无关的正常数。

定理 7.3.1 令 $m=1$ 或 2。设 $\sum_K^m$ 具有仿射连续性尺度，不变性，弱连续性和逼近性，满足单元秩条件且通过 F-E 检验，则 $\{W_h^m, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$，$\{\mathring{W}_h^m, \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 分别通过广义分片检验。

证明 以 $\{\mathring{W}_h^1, \mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)\}$为例证明。设 $w_\tau \in C^1(\bar{\Omega}), D^\beta w_\tau|_{\partial\Omega} = 0, |\beta| \leqslant 1, \tau \in \mathbb{N}$，且

$$\inf_\tau \|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau\|_{1,\sigma,\Omega} < \infty, \quad h_\tau \to 0,$$

则

$$\sum_{K \in \mathbf{K}_{h_\tau}} \int_{\partial K} \varphi \Pi_{\partial K} w_\tau N_i ds = \sum_K \sum_{F \subset \partial K} \int_F \varphi \Pi_{\partial K}^F w_\tau N_i ds$$
$$+ \sum_K \int_{\partial K} \varphi \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds. \tag{7.3.21}$$

对K的 $(n-1)$ 维表面 F，记

$$P_F^0 \varphi = \frac{1}{|F|}\int_F \varphi ds,$$

则有

$$R_F \equiv \sum_K \sum_{F \subset \partial K} \int_F \varphi \Pi_{\partial K}^F w_\tau N_i ds$$

$$
-\sum_{K}\sum_{F\subset\partial K}\int_F P_F^0\varphi(\Pi_{\partial K}^F w_\tau - P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau)N_i ds
$$

$$
+\sum_{K}\sum_{F\subset\partial K}\int_F(\varphi - P_F^0\varphi)(\Pi_{\partial K}^F w_\tau - P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau)N_i ds
$$

$$
+\sum_{K}\sum_{F\subset\partial K}\int_F \varphi P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau N_i ds,
$$

$$
R_F = \sum_{K}\sum_{F\subset\partial K}\int_F(\varphi - P_F^0\varphi)(\Pi_{\partial K}^F w_\tau - P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau)N_i ds
$$

$$
+\sum_{K}\sum_{F\subset\partial K}\int_F \varphi P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau N_i ds. \tag{7.3.22}
$$

利用引理 7.2.2,7.2.3 和 7.1.3 的证明方法可得

$$
\sum_{F\subset\partial K}\|\varphi - P_F^0\varphi\|_{0,\sigma',F} \leqslant C h_K^{\frac{1}{\sigma'}}|\varphi|_{1,\sigma',K}, \tag{7.3.23}
$$

$$
\sum_{F\subset\partial K}\|\Pi_{\partial K}^F w_\tau - P_F^0\Pi_{\partial K}^F w_\tau\|_{0,\sigma,F} \leqslant C h_K^{\frac{1}{\sigma'}}|\Pi_h^1 w_\tau|_{1,\sigma,K}. \tag{7.3.24}
$$

具体证明请读者补上. 对 $F\subset\partial K_1$, 存在 $K_2\in K_{h_\tau}, K_2\neq K_1$ (当 $F\subset\partial\Omega$ 时,认为 $K_2\subset R^n-\Omega, w_\tau|_{K_2}=0$), 使得 $F=K_1\cap K_2$. 记N是 ∂K_1 的外法向量,则

$$
\left|\int_F \varphi P_F^0(\Pi_{\partial K_1}^F w_\tau - \Pi_{\partial K_2}^F w_\tau)N_i ds\right|
$$

$$
\leqslant |P_F^0\varphi|\left|\int_F(\Pi_{\partial K}^F w_\tau - \Pi_{\partial K_2}^F w_\tau)ds\right|
$$

$$
\leqslant C h_K^{-\frac{n}{\sigma'}} h_\tau^{\frac{n}{\sigma'}+\varepsilon_1}\|\varphi\|_{1,\sigma',K_1\cup K_2}|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,K_1\cup K_2}.
$$

利用上式和(7.3.22)—(7.3.24)式及 Hölder 不等式得

$$
|R_F| \leqslant C(h + h_\tau^{\varepsilon_1})\|\varphi\|_{1,\sigma',\Omega}|\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,\Omega}. \tag{7.3.25}
$$

对 $K\in\mathscr{K}$, 记

$$
P_K^0\varphi = \int_K \varphi dx/|K|,
$$

则

$$
R_B \equiv \sum_K\int_{\partial K}\varphi\Pi_{\partial K}^F w_\tau N_i ds
$$

$$= \sum_K \int_{\partial K} P_K^0 \varphi \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds$$

$$+ \sum_K \int_{\partial K} (\varphi - P_K^0 \varphi) \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds,$$

$$\left| \int_{\partial K} P_K^0 \varphi \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds \right| \leqslant |P_0^K \varphi| \left| \int_{\partial K} \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds \right|$$

$$\leqslant C h_\tau^{-\frac{n}{\sigma'}} \|\varphi\|_{0,\sigma',K} h_\tau^{\frac{n}{\sigma'}+\varepsilon_2} |\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,K}$$

$$= C h_\tau^{\varepsilon_2} \|\varphi\|_{0,\sigma',K} |\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,K},$$

$$\left| \int_{\partial K} (\varphi - P_K^0 \varphi) \Pi_{\partial K}^E w_\tau N_i ds \right|$$

$$\leqslant \|\varphi - P_K^0 \varphi\|_{0,\sigma',\partial K} \|\Pi_{\partial K}^E w_\tau\|_{0,\sigma,\partial K}$$

$$\leqslant C h_\tau^{\frac{1}{\sigma}} |\varphi|_{1,\sigma',K} h_\tau^{-\frac{1}{\sigma}+\frac{\varepsilon_3}{\sigma}} |\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,K},$$

从而

$$|R_E| \leqslant C(h_\tau^{\varepsilon_2} + h^{\varepsilon_3/\sigma}) \|\varphi\|_{1,\sigma',\Omega} |\Pi_{h_\tau}^1 w_\tau|_{1,\sigma,\Omega}, \tag{7.3.26}$$

其中使用了不等式

$$\|\varphi - P_K^0 \varphi\|_{0,\sigma',\partial K} \leqslant C h^{\frac{1}{\sigma}} |\varphi|_{1,\sigma',K}, \tag{7.3.27}$$

这一不等式可用引理 7.2.2 和 7.2.3 的证明方法证明. 由(7.3.25)和(7.3.26)式得

$$\lim_{\tau \to \infty} \sum_K \int_{\partial K} \varphi \Pi_{\partial K} w_\tau N_i ds = \lim_{\tau \to \infty} (R_F + R_E) = 0.$$

由引理 7.3.2 得 $\{\mathring{W}_h^1, \mathring{W}^{1,\sigma}(\Omega)\}$ 通过广义分片检验. 定理的其它情形类似地可证. 证毕.

定理 7.1.2 的证明 只须证明: 在定理的条件下, 通过强 F-E 检验, 一定通过 F-E 检验. 当通过强 F-E 检验时, (7.3.15)或(7.3.18)中不等式的左端为 0, 所以它们成立. 其它不等式由下述不等式直接可以得到.

$$\|\Pi_{\partial K}^E w\|_{0,\sigma,\partial K} \leqslant C h_K^{1/\sigma'} \sum_{|\beta|=1} \|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K}, \tag{7.3.28}$$

对 $m = 1, \forall w \in C^{s_1}(K), K \in \mathscr{K}$ 成立.

$$\|\Pi_{\partial K}^{NE} w\|_{0,\sigma,\partial K} + \|\Pi_{\partial K}^{sE} w\|_{0,\sigma,\partial K}$$

$$\leqslant Ch_K^{\frac{1}{\sigma'}} \sum_{|\beta|=2} \|\Pi_K^\beta w\|_{0,\sigma,K},\tag{7.3.29}$$

对 $m=2, \forall w \in C^{t_2}(K), \forall K \in \mathscr{K}$ 成立.

当 $m=1$ 时,若 $\Pi_K^{\prime i} w=0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $\Pi_{\partial K} w=\Pi_{\partial K}^{\prime} w$ $=$常数,所以 $\Pi_{\partial K}^{\beta} w=0$. 再利用引理 7.1.3 的证明方法可以得到(7.3.28)式. $m=2$ 时也有类似的结果. 证毕.

§7.4 嵌 入 性

本节给定理7.1.3的证明. 证明的思路与[48]一致，只是特别处理了导数关系不成立时的情形及通过单元内边界不连续的难点.

本节和下一节,都设 $\{W_h\}_{h\in(0,1)}$ 是 $L^{m,\infty}(\Omega)$ 中的一族有限维子空间，而且存在整数 r 使得: $\forall w_h \in W_h$, $w_h^\beta|_K \in P_r(K)$, $|\beta| \leqslant m$, $K \in K_h$, $h \in (0,1)$. 首先从相容性的概念开始. 虽然 W_h 中的元素 w_h 的各分量之间可以没有导数关系，各分量通过单元内边界时不一定是连续的,但是它是用来做为 Sobolev 空间的近似空间,并且要具有与 Sobolev 嵌入性质类似的性质,所以对 W_h 要加一定限制条件，例如各分量间要有一定的导数关系的作用,单元内边界的间断要藕断丝连. 相容性就是这样的条件,推广的 Sobolev 嵌入定理就是在相容性条件下建立的.

称 $\{W_h\}$ 具有相容性,如果存在与 K,h 无关的常数 C 使得下述不等式

$$0 \leqslant j \leqslant m-1,\ \sum_{|\beta|=j} |w_h^\beta|_{1,\infty,K}$$

$$\leqslant C_1 \sum_{|\beta|=j+1}^{m} h^{|\beta|-j-1} |w_h^\beta|_{0,\infty,K},\tag{7.4.1}$$

$\forall w_h \in W_h, \forall K \in K_h, \forall h \in (0,1)$ 一致成立;下述不等式

$$0 \leqslant |\beta| < m, |(w_h^\beta)^{K'}(x)-(w_h^\beta)^{K''}(x)|$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|} \sup_{K \in K_h(x)} |w_h^\alpha|_{0,\infty,K}, \tag{7.4.2}$$

$\forall K', K'' \in K_h(x), \forall x \in \Omega, \forall w_h \in W_h$ 及 $\forall h \in (0,1)$ 一致成立.这里 $(w_h^\beta)^K$ 是 $(w_h^\beta)|_K$ 在K上的连续延拓.

引理 7.4.1 对于 $\lambda \in [1,\infty)$，存在λ有关的常数$\alpha(\lambda)$使得下述不等式成立

$$||a|^\lambda - |b|^\lambda| \leqslant \alpha(\lambda)|a-b|(|a|^{\lambda-1} + |b|^{\lambda-1}),$$
$$\forall a, b \in R^1. \tag{7.4.3}$$

证明 (7.4.3)式在 $\lambda = 1$ 时是显然的,所以令 $\lambda > 1$. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^\lambda}{(1-x)(1+x^{\lambda-1})}, & x \in [0,1), \\ \dfrac{\lambda}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

不难看出 $f(x)$ 是$[0,1]$的连续函数，因而有上界 $\alpha(\lambda)$. 所以有

$$(1-x^\lambda) \leqslant \alpha(\lambda)(1-x)(1+x^{\lambda-1}).$$

$\forall a, b \in R^1$，不妨设 $|a| \geqslant |b|, |a| \neq 0$，在上式取 $x = |b|/|a|$，可得

$$||a|^\lambda - |b|^\lambda| \leqslant \alpha(\lambda)||a| - |b||(|a|^{\lambda-1} + |b|^{\lambda-1}).$$

由于 $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$,(7.4.3) 式成立. 证毕.

设k是满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的整数. 又设 $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_k)$，表示满足 $1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k \leqslant n$ 的k重整数. 记S是由全体 $\binom{n}{k}$ 个这样的k重整数构成的集合. 对 $x \in R^n$，用 x_ν 表示点 $(x_{\nu_1}, \cdots, x_{\nu_k}) \in R^k$，$dx_\nu = dx_{\nu_1} \cdots dx_{\nu_k}$. 对于给定的 $\nu \in S$，记 E_ν 是由相当于 x_ν 的分量的坐标轴张起来的 R^n 中的k维平面:

$$E_\nu = \{x \mid x \in R^n, x_i = 0 \text{ 如果 } i \notin \nu\}.$$

对于任何集合 $G \subset R^n$，设 G_ν 是G在 E_ν 上的投影，特别地，

$$\Omega_\nu = \{x \mid x \in E_\nu, \text{ 存在 } y \in \Omega \text{ 使得 } y_\nu = x\}.$$

设 F_ν 是依赖于 x_ν 的k个分量的函数而且属于 $L^s(\Omega_\nu)$,其

中 $\delta = \binom{n-1}{k-1}$，定义

$$F(x) = \prod_{\nu \in S} F_\nu(x_\nu). \tag{7.4.4}$$

引理 7.4.2 由(7.4.4)式定义的 $F \in L^1(\Omega)$，且

$\|F\|_{0,1,\Omega} \leqslant \prod_{\nu \in S} \|F_\nu\|_{0,\delta,\Omega_\nu}$，即

$$\left(\int_\Omega |F(x)| dx\right)^\delta \leqslant \prod_{\nu \in S} \int_{\Omega_\nu} |F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu. \tag{7.4.5}$$

证明 对于 $\nu \in S$ 和 $\xi_\nu \in R^k$，用 $\Omega(\xi_\nu)$ 表示 Ω 和平面 $x_\nu = \xi_\nu$ 相交的 k 维平截面：

$$\Omega(\xi_\nu) = \{x \mid x \in \Omega, x_\nu = \xi_\nu\}.$$

对 n 利用归纳法可以证明 (7.4.5) 式成立. 首先考虑 $n = 2$ 的情形. 因为对于任何 n，当 $k = n$ 时(7.4.5)式总是对的，所以可以假定 $k = 1$. 对于 $n = 2$，$k = 1$，有 $\delta = 1$，S 只有两个元素 $\nu = 1$ 和 $\nu = 2$. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |F_1(x_1) F_2(x_2)| dx_1 dx_2 \\
&= \int_{\Omega_1} dx_1 \int_{\Omega(x_1)} |F(x_1) F(x_2)| dx_2 \\
&= \int_{\Omega_1} |F_1(x_1)| dx_1 \int_{(\Omega(x_1))_2} |F_2(x_2)| dx_2 \\
&\leqslant \int_{\Omega_1} |F_1(x_1)| dx_1 \int_{\Omega_2} |F_2(x)| dx_2.
\end{aligned}$$

这就是当 $n = 2$，$k = 1$ 时的(7.4.5)式. 进行类似的计算可以得到任意的 n 和 $k = 1$ 时的(7.4.5)式.

现在假定当 $n = M - 1$ 时，(7.4.5)式成立. 考虑 $n = M$ 的情形. 如前所述，可以只考虑 $2 \leqslant k \leqslant M - 1$. 于是

$$\delta = \binom{M-1}{k-1}，记\ \mu = \binom{M-2}{k-1}，\lambda = \binom{M-2}{k-2}.$$

(7.4.5)式左端被积函数是 $\binom{M}{k}$ 个因子 $|F_\nu|$ 的积，而每个 F_ν 属

于相应的空间 $L^\delta(\Omega_\nu)$. 在这些因子中的 $\binom{M-1}{k}$ 个因子是和 x_m 无关的，把这些因子叫做是与 $\nu\in A\subset S$ 相应的因子. 对于 $(M-1)$ 维区域 $\Omega(x_M)$ 应用归纳法假设,而且注意到 $(\Omega(x_M))_\nu\subset\Omega_\nu$ 就得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_M)}\prod_{\nu\in A}|F_\nu(x_\nu)|^{\frac{\delta}{\mu}}dx_1\cdots dx_{M-1}&\leqslant\prod_{\nu\in A}\left[\int_{(\Omega(x_M))_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{\frac{1}{\mu}}\\&\leqslant\prod_{\nu\in A}\left[\int_{\Omega_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{\frac{1}{\mu}}.\end{aligned}\tag{7.4.6}$$

剩下 $\binom{M}{k}-\binom{M-1}{k}=\delta$ 个因子 $|F_\nu|$ 依赖于 x_M，所以当限于 $\Omega(x_M)$ 上时，只依赖于 $k-1$ 变量. 在 $\Omega(x_M)$ 上再次应用归纳法假设,但这一次用 $k-1$ 代替 k，得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_M)}\prod_{\nu\in S-A}|F_\nu(x_\nu)|^{\frac{\delta}{\lambda}}dx_1\cdots dx_{M-1}\\\leqslant\prod_{\nu\in S-A}\left[\int_{(\Omega(x_M))_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_{\nu_1}\cdots dx_{\nu_{k-1}}\right]^{1/\lambda}.\end{aligned}$$

注意 $\mu+\lambda=\delta$，即

$$\left(\frac{\delta}{\mu}\right)^{-1}+\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{-1}=1,$$

由 Hölder 不等式,(7.4.6)式和上式得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(x_M)}\prod_{\nu\in S-A}F_\nu(x_\nu)|dx_1\cdots dx_{M-1}&\leqslant\prod_{\nu\in A}\left[\int_{\Omega_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{\frac{1}{\delta}}\\&\cdot\prod_{\nu\in S-A}\left[\int_{(\Omega(x_M))_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_{\nu_1}\cdots dx_{\nu_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\delta}}.\end{aligned}\tag{7.4.7}$$

由于 $S-A$ 包含 δ 个元素，利用(多元函数形式) Hölder 不等式得

$$\int_{\Omega_M}\prod_{\nu\in S-A}\left[\int_{(\Omega(x_M))_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_{\nu_1}\cdots dx_{\nu_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\delta}}dx_M$$

$$\leqslant\prod_{\nu\in S-A}\left[\int_{\Omega_M}\int_{(\Omega(x_M))_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\leqslant\prod_{\nu\in S-A}\left[\int_{\Omega_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

在(7.4.7)式两端同时在 Ω_M 上积分，再将上式代入，则得

$$\int_\Omega\prod_{\nu\in S}|F_\nu(x_\nu)|dx$$

$$=\int_{\Omega_M}dx_M\int_{\Omega(x_M)}\prod_{\nu\in S}|F_\nu(x_\nu)|dx_1\cdots dx_{M-1}$$

$$\leqslant\prod_{\nu\in S}\left[\int_{\Omega_\nu}|F_\nu(x_\nu)|^\delta dx_\nu\right]^{1/\delta}.$$

这就完成了归纳法并证明了(7.4.5)式。证毕。

定理 7.4.1 设 $\{W_h\}$ 具有相容性，$\sigma\in(1,\infty)$，$\mu_0,\cdots,\mu_m$ 是一组不小于 σ 的正数且满足：当 $n>(m-j)\sigma$ 时，$\mu_j\leqslant n\sigma/(n-(m-j)\sigma)$；当 $n=(m-j)\sigma$ 时，$\mu_j<\infty$；当 $n<(m-j)\sigma$ 时 $\mu_j\leqslant\infty$。则存在与 h 无关的常数 C 使得

$$\forall u_h\in W_h,\sum_{j=0}^{m}\sum_{|\beta|=j}\|u_h^\beta\|_{0,\mu_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,\sigma,\Omega},\qquad(7.4.8)$$

$\forall h\in(0,1)$ 一致成立。

证明 本定理的证明很长，分几种情况进行证明。

(1) $m\sigma<n$ 的情形。由于 Ω 是有界多胞形域，所以 $\bar{\Omega}$ 可以表示成有限个平行多面体的并：$\bar{\Omega}=\cup_{k=1}^{l}Q_k$。对于固定的 k，不妨设 Q_k 是边长为 2，形心在原点的立方体，且 Q_k 的边分别平行于坐标轴。这是因为通过一个仿射变换总可以把 Q_k 化成满足上述要求，而且保持相容性质不变。

记 $\sigma_j=n\sigma/(n-(m-j)\sigma)$，$0\leqslant j\leqslant m$。如果

$$\sum_{i\leqslant j}\sum_{|\beta|=i}\|u_h^\beta\|_{0,\sigma_j,\Omega}\leqslant C\|u_h\|_{m,\sigma,\Omega},\qquad(7.4.9)$$

$\forall u_h\in W_h,\forall h\in(0,1),j=0,\cdots,m$，一致成立，则定理的结论在

情形(1)是正确的。

现在用归纳法证明(7.4.9)式。(7.4.9)式在 $j=m$ 时是显然的。设它对 $L+1\leqslant j\leqslant m$ 均成立,考虑 $j=L$ 的情形。

对 $x\in Q_k\cap\Omega_h$,令 $w_{i,x}$ 是 Q_k 与这样的直线的交集,它平行于 x_i 坐标轴且通过 x。于是取 $\tilde{e}_i$ 是 e_i 或 $-e_i$,可以使得 $I_i=\{x+t\tilde{e},0\leqslant t\leqslant 1\}$ 包含在 $w_{i,x}$ 中。记

$$\mu=n\sigma/(n-(m-L-1)\sigma),$$
$$\lambda=(n-1)\mu/(n-\mu),q=\sigma_L.$$

对 $u\in W_h,|\beta|\leqslant L$,利用分部积分公式得

$$\begin{aligned}|u^\beta(x)|^\lambda=&\int_{I_i}|u^\beta(x+(1-t)\tilde{e}_i)|^\lambda dt\\&+\lambda\int_{I_{i,h}}t|u^\beta(x+(1-t)\tilde{e}_i)|^{\lambda-1}\\&\cdot\frac{d}{dt}|u^\beta(x+(1-t)\tilde{e}_i)|dt\\&+\sum_s t_s(|u^\beta(y_s^+)|^\lambda-|u^\beta(y_s^-)|^\lambda),\end{aligned}\qquad(7.4.10)$$

其中 $I_{i,h}$ 是 $u^\beta(x+(1-t)\tilde{e}_i)$ 在 I_i 上的所有连续点构成的集合,$y_s=x+(1-t_s)\tilde{e}_i$ 是 $\mathscr{S}_h(I_i)$ 中的单元的端点(不包括 x 和 $x+\tilde{e}_i$)构成的集合,$u^\beta(y_s^+),u^\beta(y_s^-)$ 分别表示 $u^\beta(x+(1-t)\tilde{e}_i)$ 在这点关于 t_s 的左、右极限。利用不等式(7.4.3)和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_s t_s(|u^\beta(y_s^+)|^\lambda-|u^\beta(y_s^-)|^\lambda)\right|\\&\leqslant C\sum_s|u^\beta(y_s^+)-u^\beta(y_s^-)|(|u^\beta(y_s^+)|^{\lambda-1}+|u^\beta(y_s^-)|^{\lambda-1})\\&\leqslant C\left(\sum_s|u^\beta(y_s^+)-u^\beta(y_s^-)|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\\&\quad\cdot\left(\sum_s(|u^\beta(y_s^+)|^{\mu'(\lambda-1)}+|u^\beta(y_s^-)|^{\mu'(\lambda-1)})\right)^{\frac{1}{\mu'}}.\end{aligned}$$

注意

$$|u^\beta(y_s^+)|^{\mu'(\lambda-1)} + |u^\beta(y_s^-)|^{\mu'(\lambda-1)} \leqslant 2 \sup_{K\in K_h(y_s)} |u^\beta|_{0,\infty,K}^{\mu'(\lambda-1)},$$

利用(7.4.2)式可得

$$\left|\sum_s t_s(|u^\beta(y_s^+)|^\lambda - |u^\beta(y_s^-)|^\lambda)\right|$$

$$\leqslant C\left[\sum_s\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|} \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\alpha\|_{0,\infty,K}\right)^\mu\right]^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\cdot\left[\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\beta\|_{0,\infty,K}^{\mu'(\lambda-1)}\right]^{\frac{1}{\mu'}}$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|}\left(\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\alpha\|_{0,\infty,K}^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\cdot\left(\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\beta\|_{0,\infty,K}^{\mu'(\lambda-1)}\right)^{\frac{1}{\mu'}}. \qquad (7.4.11)$$

令 $K_s^\alpha \in K_h(y_s)$ 是这样的单元

$$|u^\alpha|_{0,\infty,K_s^\alpha} = \sup_{K\in K_h(y_s)} |u^\alpha|_{0,\infty,K}.$$

对于固定的 α，对每个 K_s^α，至多还有别的一个这样的 $K_{s'}^\alpha$ 与 K_s^α 相等。不然，设 $K_{s_1} = K_{s_2} = K_{s_3} = K$，$t_{s_1} < t_{s_2} < t_{s_3}$，于是 $y_{s_1}, y_{s_2}, y_{s_3} \in K$，而且 y_{s_2} 是 $\overline{y_{s_1}y_{s_3}}$ 的相对内点。又 y_{s_2} 是某个区间$I' = K'\cap I_i$ 的端点，于是 $I \equiv K\cap I_i$ 与 I' 的交集是非空集，又不是一公共端点，又不是整个 I，与引理5.1.4矛盾。于是

$$\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\alpha\|_{0,\infty,K}^\mu \leqslant 2\sum_{K\in K_h(I_i)} \|u^\alpha\|_{0,\infty,K}^\mu.$$

对于 R^n 中的子集 B，定义 $S_h(B)$ 是所有与 B 的距离不大于 h 的点构成的集合。定义$u|_{R^n-\Omega} = 0$，利用引理 7.2.1 得

$$\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} |u^\alpha|_{0,\infty,K}^\mu \leqslant 2Ch^{-n}\sum_{K\in K_h(I_i)} \|u^\alpha\|_{0,\mu,K}^\mu$$

$$\leqslant Ch^{-n}\int_{S_h(I_i)} |u^\alpha|^\mu dy$$

$$\leqslant Ch^{-n}\|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}^\mu. \qquad (7.4.12)$$

类似地可以证明

$$\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|u^\beta\|_{0,\infty,K}^{\mu'(\lambda-1)} \leqslant Ch^{-n}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{\mu'(\lambda-1)}. \qquad (7.4.13)$$

综合(7.4.11)—(7.4.13)，得

$$\left|\sum_s t_s(|u^\beta(y_s^+)|^\lambda - |u^\beta(y_s^-)|^\lambda)\right|$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-n}\|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{(\lambda-1)}.$$

$$(7.4.14)$$

记 $\hat{x}_i = (x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$，令

$$F_i(\hat{x}_i) = \sup_{y\in w_{i,x}} |u^\beta(y)|^{\mu/(n-\mu)}. \qquad (7.4.15)$$

(7.4.10)和(7.4.14)式给出

$$F_i(\hat{x}_i)^{n-1} \leqslant \int_{w_{i,x}} |u^\beta(x)|^\lambda dx_i$$

$$+ \lambda\int_{w_{i,x}} |u^\beta(x)|^{\lambda-1}|D^{e_i}u^\beta(x)|dx_i$$

$$+ C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-n}\|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{(\lambda-1)}.$$

$$(7.4.16)$$

在(7.4.16)两端在区域 $Q_{ki} \equiv \{Q_k$ 在平面 $x_i = 0$ 上的投影$\}$上积分得

$$\int_{Q_{ki}} F_i(\hat{x}_i)^{n-1}d\hat{x}_i \leqslant \int_{Q_k} |u^\beta|^\lambda dx + \lambda\int_{Q_k\cap Q_h} |u^\beta|^{\lambda-1}|D^{e_i}u^\beta|dx$$

$$+C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-n}\int_{Q_{ki}} \|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{(\lambda-1)}d\hat{x}_i.$$

$$(7.4.17)$$

利用 Hölder 不等式得

$$\int_{Q_{ki}} \|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{\lambda-1}d\hat{x}_i$$

$$\leqslant \left(\int_{Q_{ki}} \|u^\alpha\|_{0,\mu,S_h(w_{i,x})}^{\mu}d\hat{x}_i\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\cdot\left(\int_{\Omega_{ki}}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),S_h(w_{i,x})}^{(\lambda-1)\mu'}d\hat{x}_i\right)^{\frac{1}{\mu'}}. \tag{7.4.18}$$

记中心轴为 $w_{i,x}$ 的柱坐标体积元是 $dy=\rho^{n-2}\omega_{n-1}d\rho dAdy_i$，

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{ki}}\int_{S_h(w_{i,x})}|u^\alpha|^\mu dyd\hat{x}_i\\
&=\int_{\Omega_{ki}}d\hat{x}_i\int_0^h\int_A\int_{1-h}^{1+h}|u^\alpha(y)|^\mu\rho^{n-2}d\rho dAdy_i\\
&\leqslant\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_{\Omega_{ki}}\int_{-\infty}^{\infty}|u^\alpha(x+\rho\omega+tx_i)|^\mu dtd\hat{x}_i\rho^{n-1}d\rho d\omega\\
&\leqslant\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^{n-2}\omega_n d\omega d\rho\int_{R^n}|u^\alpha(x)|^\mu dx\\
&\leqslant Ch^{n-1}\|u^\alpha\|_{0,\mu,\Omega}^\mu,
\end{aligned} \tag{7.4.19}$$

类似地

$$\int_{\Omega_{ki}}\int_{S_h(w_{i,x})}|u^\beta|^{\mu'(\lambda-1)}dyd\hat{x}_i\leqslant Ch^{n-1}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),\Omega}^{\mu'(\lambda-1)}. \tag{7.4.20}$$

综合(7.4.17)式—(7.4.20)式得

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{ki}}|F_i(\hat{x}_i)^{n-1}d\hat{x}_i&\leqslant\int_{\Omega_k}|u^\beta|^\lambda dx+\lambda\int_{\Omega_k\cap\Omega_h}|u^\beta|^{\lambda-1}|D^{e_i}u^\beta|dx\\
&+C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|u^\alpha\|_{0,\mu,\Omega}\|u^\beta\|_{0,\mu'(\lambda-1),\Omega}^{\lambda-1}.
\end{aligned} \tag{7.4.21}$$

在上式右端的第一项和第二项中，把积分区域扩大到 Ω，然后分别使用 Hölder 不等式

$$\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}=1\right),$$

注意 $q=\mu'(\lambda-1)$，可得

$$\begin{aligned}
\|F_i\|_{0,\frac{n}{n-1},\Omega_{ki}}^{\frac{n-1}{1}}\leqslant C\|u^\beta\|_{0,q,\Omega}^{q/\mu'}\Big\{\|u^\beta\|_{0,\mu,\Omega}&+\sum_{i=1}^n\|D^{e_i}u^\beta\|_{0,\mu,\Omega_h}\\
&+\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|u^\alpha\|_{0,\mu,\Omega}\Big\}.
\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

应用引理 7.4.2 到函数 $F_i(i=1,\cdots,n)$，注意到此时 $k=n-1$，得

$$\|u^\beta\|_{0,q,\Omega_k}^q = \int_{\Omega_k} |u^\beta(x)|^{n\mu/(n-\mu)}dx$$

$$\leqslant \int_{\Omega_k} \prod_{i=1}^n F_i(\hat{x}_i)dx$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^n \|F_i\|_{0,n-1,\Omega_{ki}},$$

$$\|u^\beta\|_{0,q,\Omega_k}^{(n-1)q/n} \leqslant C\|u\|_{0,q,\Omega}^{q/\mu'}\{\|u^\beta\|_{0,\mu,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|D^{e_i}u^\beta\|_{0,\mu,\Omega k}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|u^\alpha\|_{0,\mu,\Omega}\}. \tag{7.4.23}$$

而

$$\|u^\beta\|_{0,q,\Omega}^{(n-1)q/n} \leqslant C\sum_{k=1}^J \|u^\beta\|_{0,q,\Omega_k}^{(n-1)q/n},$$

且 $(n-1)q/n - q/\mu' = 1$，所以

$$\|u^\beta\|_{0,q,\Omega} \leqslant C\Big\{\|u^\beta\|_{0,\mu,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|D^{e_i}u^\beta\|_{0,\mu,\Omega_k}$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|u^\alpha\|_{0,\mu,\Omega}\Big\}. \tag{7.4.24}$$

由引理 7.2.1 和不等式(7.4.1)得

$$\|D^{e_i}u^\beta\|_{0,\mu,\Omega_k} \leqslant C\Big(\sum_{K\in K_h} |u^\beta|_{1,\mu,K}^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{K\in K_h} h^n |u^\beta|_{1,\infty,K}^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant C\Big(h^n\sum_K\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|u^\alpha\|_{0,\infty,K}\Big)^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant C\Big(h^n\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{(|\alpha|-|\beta|-1)\mu}\sum_K h^{-n}\|u^\alpha\|_{0,\mu,K}^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-1}\Big(\sum_K \|u^\alpha\|_{0,\mu,K}^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}},$$

$$\sum_{l=1}^{m} \|D^{e_l} u^{\beta}\|_{0,\mu,\Omega_h} \leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-1} \|u^{\alpha}\|_{0,\mu,\Omega}. \quad (7.4.25)$$

再利用引理 7.2.1 得

$$\begin{aligned} l \geqslant L+2, \quad \sum_{|\alpha|=l} \|u^{\alpha}\|_{0,\mu,\Omega} &= \sum_{|\alpha|=l} \left(\sum_{K} \|u^{\alpha}\|_{0,\mu,K}^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &\leqslant C \sum_{|\alpha|=l} \left(\sum_{K} h^{\mu\left(\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\sigma_l}\right)} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,K}^{\mu} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &= C \sum_{|\alpha|=l} h^{\left(\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\sigma_l}\right)} \left(\sum_{K} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,K}^{\sigma_l} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,K}^{\mu-\sigma_l} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &\leqslant C h^{\left(\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\sigma_l}\right)} \sum_{|\alpha|=l} \left(\|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,\Omega}^{\mu-\sigma_l} \sum_{K} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,K}^{\sigma_l} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &= C h^{\left(\frac{n}{\mu}-\frac{n}{\sigma_l}\right)} \sum_{|\alpha|=l} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_l,\Omega}. \end{aligned} \quad (7.4.26)$$

注意

$$\frac{n}{\mu} - \frac{n}{\sigma_l} = L + 1 - l,$$

将(7.4.26)代入(7.4.25)和(7.4.24)中就可以得

$$\|u^{\beta}\|_{0,q,\Omega} \leqslant C \left\{ \|u^{\beta}\|_{0,\mu,\Omega} + \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} \|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_{|\alpha|},\Omega} \right\}. \quad (7.4.27)$$

应用归纳法假设得知(7.4.9)式对 $j = L$ 也成立.(7.4.9)式得证.

(2) 由于 $m\sigma > n, n \neq (m-j)\sigma, j = 0,1,\cdots m$。设 j_0 满足 $n > (m-j_0)\sigma, n < (m-j_0+1)\sigma$。令 $\sigma_j = n\sigma/(n-(m-j)\sigma), j \geqslant j_0$。由情形(1)的证明方法可证明

$$\sum_{|\beta|=0}^{j} \|u_h^{\beta}\|_{0,\sigma_j,\Omega} \leqslant C \|u_h\|_{m,\sigma,\Omega}, \forall u_h \in W_h, m \geqslant j \geqslant j_0. \quad (7.4.28)$$

由于 Ω 是有界多胞形域,所以存在一个锥 $C = \{y \mid y/\|y\| \in A, 0 < \|y\| < H\}$,使得 $\forall x \in \Omega$,都存在一个包含在 Ω 中与 C 全等的锥 C_x 且其顶点在 x。这里 A 是单位球面上一个相对开集,$H>0$ 是常数.$\forall x \in \Omega_h$,记 (r,θ) 是 R^n 中原点在 x 的球极坐标.$\forall (r,\theta) \in R^n$,记 $l(r,\theta) = \{y \mid y = x + t\theta, 0 \leqslant t \leqslant r\}$,令 $u \in$

W_k, $|\beta| \leqslant j_0 - 1$. $\forall (r,\theta) \in C_x$，利用分部积分公式得

$$u^\beta(x) = \sum_s (u^\beta(y_s^+) - u^\beta(y_s^-)) + u^\beta(r,\theta) - \int_{I_h(r,\theta)} \frac{\partial}{\partial t} u^\beta(t,\theta) dt,$$

其中 $I_h(r,\theta)$ 是 $u^\beta(t,\theta)$ 在 $I(r,\theta)$ 上的连续点，$y_s = x + t_s\theta$ 是 $\mathscr{S}_h(I(r,\theta))$ 中的元素的端点，但不是 x 和 (r,θ). 利用与情形(1)类似的处理方法，可得

$$|u^\beta(x)| \leqslant |u^\beta(r,\theta)| + \int_{I_h(r,\theta)} \sum_{i=1}^n |D^{e_i} u^\beta(x + t\theta)| dt + C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-n} \|u^\alpha\|_{0,1,S_h(I(r,\theta))}. \tag{7.4.29}$$

在上式两端同乘体积元 $r^{n-1}\omega_n(\theta) dr d\theta$，且在 $(0,H) \times A$ 上积分可得

$$|C_x| |u^\beta(x)| \leqslant \int_{C_x} |u^\beta(x+y)| dy + \sum_{i=1}^n \int_A \int_0^H \int_0^r |D^{e_i} u^\beta(x + t\theta)| r^{n-1} \omega_n(\theta) dt dr d\theta + C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-n} \int_{C_x} \int_{S_h(\overline{zx})} |u^\alpha(x+y)| dy dz \tag{7.4.30}$$

利用情形(1)的方法可得

$$\int_{C_x} \int_{S_h(\overline{zx})} |u^\alpha(x+y)| dy dx \leqslant C h^{n-1} \|u^\alpha\|_{0,1,\Omega} \leqslant C h^{n-1} \|u^\alpha\|_{0,\sigma,\Omega}.$$

因而对(7.4.30)式右端的第三项有下述估计

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m h^{|\alpha|-|\beta|-n} \int_{C_x} \int_{S_h(\overline{zx})} |u^\alpha(x+y)| dy dz \leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^m \|u^\alpha\|_{0,\sigma,\Omega}. \tag{7.4.31}$$

利用交换积分次序有

$$E = \sum_{i=1}^{n}\int_{A}\int_{0}^{H}\int_{0}^{r}|D^{e_i}u^{\beta}(x+t\theta)|r^{n-1}\omega_n(\theta)dt\,dr\,d\theta$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{A}\int_{0}^{H}\int_{t}^{H}|D^{e_i}u^{\beta}(x+t\theta)|r^{n-1}\omega_n dr\,dt\,d\theta$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{A}\int_{0}^{H}|D^{e_i}u^{\beta}(x+t\theta)|\omega_n(\theta)dt\,d\theta\int_{0}^{H}r^{n-1}dr$$

$$= \frac{H^n}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{A}\int_{0}^{H}|D^{e_i}u^{\beta}(x+t\theta)|t^{1-n}(t^{n-1}\omega_n(\theta)dt\,d\theta).$$

令 $y = x + t\theta$, 则

$$E \leqslant \frac{H^n}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{C_x}|D^{e_i}u^{\beta}(y)|\,\|x-y\|^{1-n}dy.$$

由于 $\sigma_{j_0} > n$，$(n-1)(1-\sigma'_{j_0}) > -1$，利用 Hölder 不等式得

$$E \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\|D^{e_i}u^{\beta}\|_{0,\sigma_{j_0},C_x}\left(\int_{C_x}\|x-y\|^{(1-n)\sigma'_{j_0}}\right)^{1/\sigma'_{j_0}}$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\|D^{e_i}u^{\beta}\|_{0,\sigma_{j_0},\Omega}.$$

利用情形(1)对

$$\sum_{i=1}^{n}\|D^{e_i}u^{\beta}\|_{0,\sigma_{j_0},\Omega}$$

的处理方法得

$$E \leqslant C\left\{\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{j_0}\|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_{j_0},\Omega}\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|=j_0+1}^{m}\|u^{\alpha}\|_{0,\sigma_{|\alpha|},\Omega}\right\}. \qquad (7.4.32)$$

对(7.4.30)式右端第一项，利用 Hölder 不等式得

$$\int_{C_x}|u^{\beta}(x+y)|dy \leqslant \int_{\Omega}|u^{\beta}|dy \leqslant C\|u^{\beta}\|_{0,\sigma,\Omega}. \qquad (7.4.33)$$

利用(7.4.30)—(7.4.33)和(7.4.28)式得

$$|\beta| < j_0,\ \forall x \in \Omega,\ |u^\beta(x)| \leqslant C\|u\|_{m,\sigma,\Omega}.$$

所以定理的结论在 $m\sigma > n$，且当 $n \neq (m-j)\sigma$ 时为真.

(3) $m\sigma \geqslant n$，且有 $j_0 \in \{0,\cdots,m\}$ 使得 $n=(m-j_0)\sigma$.由情形(1)可知,当 $j > j_0$ 时,令 $\sigma_j = n\sigma/(n-(m-j))$, 有

$$\sum_{|\beta|<j} \|u^\beta\|_{0,\sigma_j,\Omega} \leqslant C\|u\|_{m,\sigma,\Omega}.$$

现在选定 $\mu > \sigma$ 且 μ 充分接近 σ 使得 $n > (m-j_0)\mu$, $n < (m-j_0+1)\mu$。注意

$$\|u\|_{m,\mu,\Omega} \leqslant C\|u\|_{m,\sigma,\Omega},$$

由情形(2) 可得,当 $|\beta| < j_0$ 时,

$$\|u^\beta\|_{0,\infty,\Omega} \leqslant C\|u\|_{m,\mu,\Omega} \leqslant C\|u\|_{m,\sigma,\Omega}.$$

由情形(1) 可得,当 $\sigma_\mu = n\mu/(n-(m-j_0)\mu)$ 时,

$$\sum_{|\beta|=j_0} \|u^\beta\|_{0,\sigma_\mu,\Omega} \leqslant C\|u\|_{m,\sigma,\Omega}.$$

对 $\forall q > \sigma$，总可以选择 μ 使得 $q < \sigma_\mu$。所以定理的结论在情形(3)成立。

综合(1)—(3),定理得证。

现在考虑迹嵌入的部分。设 ν 满足 $1 \leqslant \nu < n$，对 $w \in W_h^m$，$\nabla_\nu w^\beta$ 表示 w^β 在 Ω^ν 上关于 ν 维坐标的梯度向量.

引理 7.4.3 设 $m=1$，$\{W_h\}$ 具有相容性，Ω^ν 是 ν 维边长为 1 的立方体. 若 $\nu < \sigma$，$q \geqslant 1$，则 $\forall w \in W_h, x, y \in \Omega^\nu$，下式

$$|w^0(x) - w^0(y)| \leqslant C_1\{\|x-y\|^{1-\frac{\nu}{\sigma}}\|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu} + h^{1-\frac{n}{q}}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,S_h(\Omega^\nu)},\} \tag{7.4.34}$$

当 $\|x-y\| \leqslant h$ 时成立;下式

$$|w^0(x) - w^0(y)| \leqslant C_1\|x-y\|^{1-\frac{\nu}{\sigma}}\{\|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu} + h^{\frac{\nu-n}{\sigma}}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,S_h(\Omega^\nu)}\} \tag{7.4.35}$$

当 $\|x-y\| > h$ 时成立,其中 C_1 是与 h 无关的常数。

证明 设 $x,y \in \Omega^\nu$, $\lambda = \|x-y\| < 1$，存在一个 ν 维立方体

Q, Q 的边长为 λ，且 $x, y \in Q \subset \Omega^\nu$。令 $z \in Q$，则

$$w^0(x) = w^0(z) - \int_0^1 \frac{d}{dt} w^0(x + t(z - x))dt$$

$$+ \sum_s t_s(w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-)),$$

其中 $y_s = x + t_s(z - x)$ 是做为 t 的函数 $w^0(x + t(z - x))$ 的间断点 ($t_s \in (0,1)$)，$w^0(y_s^+)$，$w^0(y_s^-)$ 分别表示关于 t_s 的左，右极限。于是在上式两端对变量 z 在 Q 上积分得

$$\lambda^\nu w^0(x) - \int_Q w^0(z)dz = -\int_Q \int_0^1 \frac{d}{dt} w^0(x + t(z - x))dtdz$$

$$+ \int_Q \sum_s t_s(w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-))dz,$$

$$|w^0(x) - \lambda^{-\nu}\int_Q w^0(z)dz|$$

$$\leqslant C\lambda^{-\nu+1}\int_Q\int_0^1 |\nabla_\nu w^0(x + t(z - x))|dtdz$$

$$+ \lambda^{-\nu}\int_Q \sum_s |w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-)|dz. \qquad (7.4.36)$$

对(7.4.36)式右端的第一项，令 $\tilde{x} = t(z - x) + x$，则 $t^\nu dz = d\tilde{x}$，记 $Q_t = \{\tilde{x} | x + t(z - x), z \in Q\}$。利用 Hölder 不等式得

$$\int_Q dz \int_0^1 |\nabla_\nu w^0(x + t(z - x))|dt$$

$$= \int_0^1 \int_{Q_t} |\nabla_\nu w^0(\tilde{x})| d\tilde{x} t^{-\nu} dt$$

$$\leqslant \int_0^1 t^{-\nu} dt \left(\int_{Q_t} d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{\sigma'}} \|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}$$

$$\leqslant \int_0^1 t^{-\nu}(t\lambda)^{\frac{\nu}{\sigma'}} dt \|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}.$$

所以

$$\int_I dz \int_0^1 |\nabla_\nu w^0(x + t(z - x))|dt$$

$$\leqslant C\lambda^{\frac{\nu}{\sigma'}} \|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}, \qquad (7.4.37)$$

对于(7.4.36)式的右端第二项，利用(7.4.2)式得

$$\sum_s |w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-)| \leqslant C \sum_s \sum_{|\beta|=1} h \sup_{K\in K_h(y_s)} \|w^\beta\|_{0,\infty}$$

$$\leqslant Ch \sum_{|\beta|=1} \left(\sum_s 1\right)^{\frac{1}{\mu'}} \left(\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|w^\beta\|_{0,\infty,K}^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (7.4.38)$$

利用(7.4.12)式得

$$\sum_s \sup_{K\in K_h(y_s)} \|w^\beta\|_{0,\infty,K}^{\mu} \leqslant Ch^{-n} \|w^\beta\|_{0,\mu,S_h(\overline{zx})}^{\mu}. \qquad (7.4.39)$$

y_s 只可能位于 $K_h(\overline{xz})$ 中的两个单元 K_s^1, K_s^2 的交集上，而且至多还有另外一个 s' 使得 K_s^1, K_s^2 中的一个与 $K_{s'}^1, K_{s'}^2$ 中的一个相等，所以 y_s 的个数小于等于 $K_h(\overline{zx})$ 中的单元个数的二倍，进而

$$\sum_s 1 \leqslant 2(\|x-y\|+h)h^{n-1}/(\eta^n h^n)$$

$$\leqslant C(\lambda+h)h^{-1}. \qquad (7.4.40)$$

综合(7.4.38)—(7.4.40)式可得

$$\sum_s |w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-)|$$

$$\leqslant Ch^{1-\frac{n}{\mu}-\frac{1}{\mu'}}(\lambda+h)^{\frac{1}{\mu'}} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,\mu,S_h(\overline{zx})}, \qquad (7.4.41)$$

$$\int_Q \sum_s |w^0(y_s^+) - w^0(y_s^-)| dz$$

$$\leqslant C^{1-\frac{n}{\mu}-\frac{1}{\mu'}}(\lambda+h)^{\frac{1}{\mu'}} \sum_{|\beta|=1} \left(\int_Q dz\right)^{\frac{1}{\mu'}}$$

$$\cdot \left(\int_Q \int_{S_h(\overline{zx})} |w^\beta|^\mu dy dz\right)^{\frac{1}{\mu}}. \qquad (7.4.42)$$

显然有

$$\left(\int_Q dz\right)^{\frac{1}{\mu'}} = \lambda^{n/\mu'}. \qquad (7.4.43)$$

当 $\lambda \leqslant h$ 时

$$\int_Q \int_{S_h(\overline{zx})} |w^\beta|^\mu dy dz$$

$$\leqslant \int_{\Omega}\int_{s_h(\Omega^\nu)} |w^\beta|^\mu dydz = \lambda^\nu \|w^\beta\|^\mu_{0,\mu,s_h(\Omega^\nu)}. \quad (7.4.44)$$

当 $\lambda > h$ 时，交换积分次序，类似于(7.4.19)式得

$$\int_{\Omega}\int_{s_h(\overline{xz})} |w^\beta|^\mu dydz \leqslant \int_{\Omega^\nu}\int_{s_h(\overline{xz})} |w^\beta|^\mu dydz$$

$$\leqslant C(\lambda + 2h)h^{\nu-1}\|w^\beta\|^\mu_{0,\mu,s_h(\Omega^\nu)}. \quad (7.4.45)$$

当 $\lambda \leqslant h$ 时，利用(7.4.36)，(7.4.37)，(7.4.42)—(7.4.44)，令 $\mu = q$ 得

$$|w^0(x) - \frac{1}{\lambda^\nu}\int_{\Omega} w^0(z)dz| \leqslant C\left\{\lambda^{1-\frac{\nu}{\sigma}}\|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}\right.$$

$$\left. + h^{1-\frac{n}{q}} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,q,s_h(\Omega^\nu)}\right\}. \quad (7.4.46)$$

当 $\lambda > h$ 时，利用(7.4.36)，(7.4.37)，(7.4.42)，(7.4.43)和(7.4.45)，令 $\mu = \sigma$ 得

$$|w^0(x) - \frac{1}{\lambda^\nu}\int_{\Omega} w^0(z)dz| \leqslant C\lambda^{1-\frac{\nu}{\sigma}}\left\{\|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}\right.$$

$$\left. + h^{\frac{\nu-n}{\sigma}} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,\sigma,s_h(\Omega^\nu)}\right\}. \quad (7.4.47)$$

由于(7.4.46)和(7.4.47)式中可将 x 换成 y，所以(7.4.34)和(7.4.35)式成立。

如 $\|x - y\| > 1$，在上面的讨论中取 $\lambda = 1$，可以得到(7.4.35)式。证毕。

引理 7.4.4 设 $m = 1$，$\{W_h\}$ 具有相容性，Ω^ν 是 ν 维边长为 1 的立方体。若 $\nu < \sigma, q \geqslant 1, s = (\sigma - \nu)q/(\nu\sigma + (\sigma - \nu)q)$，则 $\forall w \in W_h$，$x \in \Omega^\nu$，下式成立：

$$|w^0(x)| \leqslant C\left\{\sum_{|\beta|\leqslant 1} \|D^\beta w^0\|^{1-s}_{0,\sigma,\Omega^\nu}\right.$$

$$\left. + h^{\frac{\nu-n}{\sigma}(1-s)} \sum_{|\beta|=1} |w^\beta\|^{1-s}_{0,\sigma,s_h(\Omega^\nu)}\right\}$$

$$\times \left\{\|w^0\|^s_{0,q,\Omega^\nu} + h^{\left(1+\frac{\nu-n}{q}\right)s}\right.$$

$$\cdot \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|^{s}_{0,q,S_h(\Omega^\nu)}\Big\}. \tag{7.4.48}$$

证明 令

$$U = \|\nabla_\nu w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu} + h^{\frac{\nu-n}{\sigma}} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,\sigma,S_h(\Omega^\nu)},$$

不妨设 $U > 0$。$\forall y \in \Omega^\nu$，记

$$\rho = \|x - y\|, \ \zeta = (|w^0(x)|C_1U)^{\sigma/(\sigma-\nu)}.$$

首先设 $\zeta \leqslant 1$，则当 $\rho \leqslant \zeta$ 时有

$$|w^0(x)| - C_1U\rho^{1-\frac{\nu}{\sigma}} \geqslant 0.$$

当 $\rho \leqslant h$ 时，利用(7.4.34)式得

$$|w^0(y)| + h^{1-\frac{n}{q}} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,q,S_h(\Omega^\nu)}$$

$$\geqslant |w^0(x)| - C_1U\rho^{1-\frac{\nu}{\sigma}}. \tag{7.4.49}$$

当 $\rho > h$ 时，利用(7.4.35)式得

$$|w^0(y)| \geqslant |w^0(x)| - C_1U\rho^{1-\frac{\nu}{\sigma}}. \tag{7.4.50}$$

记以 x 为心，t 为半径的球为 B_t，在(7.4.49)式两端同取 q 次幂，然后在 $B_h \cap \Omega^\nu \cap B_\zeta$ 上积分，再在(7.4.50)式两端同取 q 次幂，同时在 $\Omega^\nu \cap B_\zeta - B_h$ 上积分，最后相加得

$$|w^0(x)|^{q+\nu\sigma/(\sigma-\nu)}U^{-\nu\sigma/(\sigma-\nu)} \leqslant C\Big\{\int_{\Omega^\nu} |w^0(y)|^q dy$$

$$+ h^{\nu+(1-\frac{n}{q})q} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|^q_{0,q,S_h(\Omega^\nu)}\Big\}.$$

由于立即得(7.4.48)式。

如果 $\zeta > 1$，则当 $\rho \leqslant 1$ 时，

$$|w^0(x)| - C_1U\rho^{1-\frac{\nu}{\sigma}} \geqslant |w^0(x)| - |w^0(x)|\rho^{1-\frac{\nu}{\sigma}}.$$

令 $t > 1$，在(7.4.49)式中将 q 换成 t，在两端同取 t 次幂，且在 $B_h \cap \Omega^\nu$ 上积分．在(7.4.50)式两端也取 t 次幂，且在 $\Omega^\nu \cap B_1 - B_h$ 上积分，最后两式相加得

$$C\Big\{\int_{\Omega^\nu} |w^0|^t dy + h^{\nu+(1-\frac{n}{t})t} \sum_{|\beta|=1} \|w^\beta\|_{0,t,S_h(\Omega^\nu)}\Big\} \geqslant |w^0(x)|^t.$$

取 $t=((\sigma-\nu)q+\nu\sigma)/\sigma$，利用 Hölder 不等式得

$$|w^0(x)|^{((\sigma-\nu)+\nu\sigma)/\sigma}\leqslant C\{\|w^0\|_{0,q,\Omega^\nu}^{q(\sigma-\nu)/\sigma}\|w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}^{\nu}$$

$$+h^{\nu\left(1-\frac{n}{t}\right)t}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,S_h(\Omega^\nu)}^{q(\sigma-\nu)/\sigma}\|w^\beta\|_{0,\sigma,S_h(\Omega^\nu)}^{\nu}\}.$$

由于

$$\nu+\left(1-\frac{n}{t}\right)t\geqslant\left(1+\frac{\nu-n}{q}\right)(\sigma-\nu)/\sigma+(\nu-n)\nu/\sigma,$$

$$\|w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu}\leqslant\sum_{|\beta|\leqslant1}\|D^\beta w^0\|_{0,\sigma,\Omega^\nu},$$

所以(7.4.48)式成立．证毕．

定理 7.4.2 令 $m=1$ 或 $m=n=2$．设 $\{W_h\}$ 具有相容性，$\sigma\in(1,\infty)$．若对 $j(0\leqslant j<m)$，$(m-j)\sigma<n$，则当整数 k 及实数 q_j 满足 $n-(m-j)\sigma<k<n$，$\sigma\leqslant q_j\leqslant k\sigma/(n-(m-j)\sigma)$ 时，存在与 h 无关的常数 C 使得

$$\forall w_h\in W_h,\ \sum_{|\beta|=j}\|w_h^\beta\|_{0,q_j,\Omega^k}\leqslant C\|w_h\|_{m,\sigma,\Omega},\quad(7.4.51)$$

$\forall h\in(0,1)$ 成立．若 $(m-j)\sigma=n$，则 $\forall k\in\{1,\cdots,n-1\}$，$q_j\in[\sigma,\infty)$，(7.4.51)成立．

证明 (1)先设 $m=1$，$n>\sigma$．与定理 7.4.1 的证明情形(1)的理由一样，不妨设 Ω 是边长是 2 的坐标立方体(即各边分别平行于某个坐标轴)的并集．

设 R_0^k 是 R^n 中的一个 k 维坐标子空间，Ω^k 在 R_0^k 上有一个一对一的投影 Ω_0^k．记 ν 是小于 σ 的最大正整数，那么 $\sigma>\nu>0$．由 $k>n-\sigma$ 得 $n-\nu\leqslant k$．记 $\mu=\binom{k}{n-\nu}$，用 $E_i(1\leqslant i\leqslant\mu)$ 表示维数为 $n-\nu$ 的 R_0^k 的各种坐标子空间，Ω_i 表示 Ω_0^k（因此 Ω^k）在 E_i 上的投影．另外，对每个 $x\in\Omega_i$，记 $\Omega_{i,x}$ 为 Ω 和通过 x 点且垂直于 E_i 的 ν 维平面的交集，于是 $\Omega_{i,x}$ 包含一个边长为，有一个顶点在 x 的 ν 维坐标立方体．由引理 7.4.4，对于 $q=n\sigma/(n-\sigma)$，当 $w\in W_h$ 时，有

$$\sup_{y\in\Omega_{i,x}} |w^0(y)|^{(n-\nu)\sigma/(n-\sigma)}$$

$$\leqslant C\left\{\|w^0\|_{0,q,\Omega_{i,x}}^{(\sigma-\nu)q/\sigma}+h^{(1+\frac{\nu-n}{q})(\sigma-\nu)q/\sigma}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,S_h(\Omega_{i,x})}^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\right\}$$

$$\times\left\{\sum_{|\beta|\leqslant 1}\|D^\beta w^0\|_{0,\sigma,\Omega_{i,x}}^{\nu}+h^{\frac{\nu-n}{\sigma}\nu}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,\sigma,S_h(\Omega_{i,x})}^{\nu}\right\}.$$

(7.4.52)

用 dx^i 和 dx_*^i 分别表示 E_i 和 E_i 的正交余集中的体积元素，将上式在 Ω_i 上积分，利用 Hölder 不等式就导出

$$\int_{\Omega_i}\sup_{y\in\Omega_{i,x}} |w^0(y)|^{(n-\nu)\sigma/(n-\sigma)}dx^i$$

$$\leqslant C\left\{\left[\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_{i,x}}|w^0(x)|^q dx_*^i dx^i\right]^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\right.$$

$$\left.+h^{(1+\frac{\nu-n}{q})(\sigma-\nu)q/\sigma}\sum_{|\beta|=1}\left[\int_{\Omega_i}\int_{S_h(\Omega_{i,x})}|w^\beta(y)|^q dy dx^i\right]^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\right\}$$

$$\times\left\{\left[\int_{\Omega_i}\int_{\Omega_{i,x}}\sum_{|\beta|\leqslant 1}|D^\beta w^0|^\sigma dx_*^i dx^i\right]^{\nu/\sigma}\right.$$

$$\left.+h^{\frac{\nu-n}{\sigma}\nu}\sum_{|\beta|=1}\left[\int_{\Omega_i}\int_{S_h(\Omega_{i,x})}|w^\beta(y)|^q dy dx^i\right]^{\nu/\sigma}\right\}.$$

由于

$$\int_{\Omega_i}\int_{S_h(\Omega_{i,x})}|w^\beta(y)|^q dy dx^i\leqslant Ch^{n-\nu}\|w^\beta\|_{0,q,\Omega}^q,$$

$$\int_{\Omega_i}\int_{S_h(\Omega_{i,x})}|w^\beta(y)|^\sigma dy dx^i\leqslant Ch^{n-\nu}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}^\sigma,$$

所以得

$$\int_{\Omega_i}\sup_{y\in\Omega_{i,x}} |w^0(y)|^{(n-\nu)\sigma/(n-\sigma)}dx^i$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{|\beta|\leqslant 1}\|D^\beta w^0\|_{0,\sigma,\Omega}^{\nu}+\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}^{\nu}\right\}$$

$$\times\left\{\|w^0\|_{0,q,\Omega}^{(\sigma-\nu)q/\sigma}+h^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,\Omega}^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\right\}. \quad (7.4.53)$$

利用引理 7.4.2 到 R_0^k 的子空间 E_i，此时

$$\delta = \binom{k-1}{n-\nu-1}.$$

令 $dx^{(k)}$ 表示 R_0^k 中的体积元素，取 $q_j = k\sigma/(n-\sigma)$，则

$$\|w^0\|_{0,q_j,\Omega^k}^{q_j} \leqslant C\int_{\Omega_0^k}\prod_{i=1}^{\mu}\sup_{y\in\Omega_{i,x}}|w^0(y)|^{q_j/\mu}dx^{(k)}$$

$$\leqslant C\prod_{i=1}^{\mu}\left[\int_{\Omega_i}\sup_{y\in\Omega_{i,x}}|w^0(y)|^{q_j\delta/\mu}dx^i\right]^{1/\delta}. \qquad (7.4.54)$$

注意 $q_j\delta/\mu = (n-\nu)\sigma/(n-\sigma)$，从而由 (7.4.53) 和 (7.4.54)式得

$$\|w^0\|_{0,q_j,\Omega^k} \leqslant C\left\{\|w^0\|_{0,q,\Omega}^{(\sigma-\nu)q/\sigma} + h^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,q,\Omega}^{(\sigma-\nu)q/\sigma}\right\}^{\frac{\mu}{q_j\delta}}$$

$$\times\left\{\sum_{|\beta|\leqslant 1}\|D^\beta w^0\|_{0,\sigma,\Omega}^{\nu} + \sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}^{\nu}\right\}^{\frac{\mu}{q_j\delta}}. \qquad (7.4.55)$$

由不等式(7.2.1)和(7.4.1)式得

$$\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta w^0\|_{0,\sigma,\Omega} \leqslant C\sum_{|\beta|=1}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}. \qquad (7.4.56)$$

再由不等式(7.2.1)得

$$\|w^\beta\|_{0,q,\Omega} \leqslant Ch^{\frac{n}{q}-\frac{n}{\sigma}}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega} = Ch^{-1}\|w^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}. \qquad (7.4.57)$$

由定理 7.4.1 得

$$\|w^0\|_{0,q_j,\Omega} \leqslant C\|w\|_{1,\sigma,\Omega}. \qquad (7.4.58)$$

将(7.4.57)和(7.4.58)式代入(7.4.55)中就可得到当 $q_j = k\sigma/(n-\sigma)$ 时的(7.4.49)式。进而推得其它的 q_j。

(2) $m=1, n=\sigma$ 的情形，$\forall k\in\{1,\cdots,n-1\}$，$q_j\in[\sigma,\infty)$，选择满足 $1<\mu<\sigma$，$n-\mu<k, q_j\leqslant k\mu/(n-\mu)$，由(1)可知，$\forall w_h\in W_h$，

$$\|w_h^0\|_{0,q_j,\Omega^k} \leqslant C\|w_h\|_{1,\mu,\Omega} \leqslant C\|w_h\|_{1,\sigma,\Omega}.$$

所以 $m=1$ 的情形由1)、2)和定理 7.4.1 ($n<\sigma$ 的情形)得证。

(3) $m=n=2$ 的情形。$j=1, \sigma\in(1,\infty)$时用类似于第(1)、(2)步的方式可证得(7.4.49)式。当 $j=0$ 时由定理7.4.1可得(7.4.

49)式。证毕。

现在验证 W_h^m 具有相容性。

定理 7.4.3 令 $m=1$ 或 2，设 $\sum_K^m$ 具有仿射连续性，尺度不变性，弱连续性和逼近性且满足单元秩条件。则 $\{W_h^m\}$ 具有相容性。

证明 由(7.1.9)式或(7.1.12)及(7.1.13)式可知相容性的第一不等式(7.4.1)成立。现在考虑(7.4.2)式，先令 $m=1$。若 $w_h\in W_h^1$，则存在 $u\in C^1(\Omega)$，使得 $w_h=\Pi_h^1 u$。对 $K_1,K_2\in \mathcal{K}_h$，如果 $F=K_1\cap K_2$ 是 $n-1$ 维表面，则在(7.1.10)式和(7.1.11)式中令 $\mu=\infty$，由三角不等式得

$$
\begin{aligned}
&\|\Pi_{K_1}^0 u-\Pi_{K_2}^0 u\|_{0,\infty,F}\\
&\leqslant Ch\sum_{|\beta|=1}(\|\Pi_{K_1}^\beta u\|_{0,\infty,K_1}+\|\Pi_{K_2}^\beta u\|_{0,\infty,K_2}).
\end{aligned}
\tag{7.4.59}
$$

设 $x\in\Omega$，$K',K''\in\mathcal{K}_h(x)$。如果 $K'=K''$，那么(7.4.2) $\forall w_h\in W_h^1$ 成立，所以令 $K'\neq K''$，由引理 5.1.3 可知 $\mathcal{K}_h(x)$ 是强连接的，即存在彼此相异的 $K_1,\cdots,K_s\in\mathcal{K}_h(x)$，$K'=K_1$，$K''=K_s$，而 $F_t=K_t\cap K_{t+1}(1\leqslant t\leqslant s-1)$ 是 K_t 和 K_{t+1} 的 $(n-1)$ 维公共表面。利用(7.4.59)式可得

$$
\begin{aligned}
|(w_h^0)^{K'}(x)-(w_h^0)^{K''}(x)| &= \left|\sum_{t=1}^{s-1}((w_h^0)^{K_{t+1}}(x)-(w_h^0)^{K_t}(x))\right|\\
&\leqslant \sum_{t=1}^{s-1}\|\Pi_{K_{t+1}}^0 u-\Pi_{K_t}^0 u\|_{0,\infty,F_t}\\
&\leqslant Ch\sum_{|\beta|=1}\sum_t\|\Pi_{K_t}^\beta u\|_{0,\infty,K_t}.
\end{aligned}
$$

由引理 5.1.2 可知 $\mathcal{K}_h(x)$ 中单元的个数小于一个与 h 无关的数，所以

$$
\begin{aligned}
&|(w_h^0)^{K'}(x)-(w_h^0)^{K''}(x)|\\
&\leqslant Ch\sum_{|\beta|=1}\sup_{K\in\mathcal{K}_h(x)}\|\Pi_K^\beta u\|_{0,\infty,K}
\end{aligned}
$$

$$= C_h \sum_{|\beta|=1} \sup_{K \in K_h(x)} \|w_h^\beta\|_{0,\infty,K}.$$

于是(7.4.2)式成立,所以 W_h^1 具有相容性.

用类似的方法可以对 $m=2$ 的情形进行证明. 定理得证.

由定理 7.4.1—7.4.3 可得定理 7.1.3 成立. 本节的任务已完成.

§7.5 紧 致 性

本节给出紧致性定理的证明. 首先还是从具有相容性的容间族 $W_h \subset L^{m,\sigma}(\Omega)$ 着手. 先给出一些有用的引理, 然后证明较为一般的紧致性定理,最后给出定理 7.1.4—7.1.5 的证明.

引理 7.5.1 设 $\{W_h\}$ 具有相容性,则存在与 h 无关的常数 C 使得

$$|\beta| < m, w_h \in W_h, |w_h^\beta(a) - w_h^\beta(b)|$$
$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|} \sum_{K \in K_h(\overline{ab})} \|w_h^\alpha\|_{0,\infty,K}, \tag{7.5.1}$$

对所有包含在 Ω 中的线段 $\overline{ab}$ 和 $h \in (0,1)$ 成立.

证明 设 $a, b \in \Omega$, $\overline{ab} \subset \Omega$. 由 K_h 生成的 $\overline{ab}$ 的剖分 $\mathscr{S}_h(\overline{ab})$ 具有引理 5.1.4 所述的性质,即线段

$$\overline{ab} = \{x \in R^n | x = a + t(b-a),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

分成有限个子区间. 这些区间的端点的坐标记为

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = 1.$$

记 $x_s = a + t_s(b-a)$, $0 \leqslant s \leqslant l$. 对每个区间 $[t_{s-1}, t_s]$, 只存在一个线段 $I_s \in \mathscr{S}_h(\overline{ab})$ 和相应的 $K_s \in K_h$ 使得

$$I_s = K_s \cap \overline{ab} = \overline{x_{s-1}x_s}.$$

$\forall w_h \in W_h$, $|\beta| < m$, 定义 $g(t) = w_h^\beta(a + t(b-a)), 0 \leqslant t \leqslant 1$, $g(t)$ 在 (t_{s-1}, t_s) 上连续,在 t_s, g 具有左右极限 $g(t_s+)$ 和 $g(t_s-)$. 这里 $g(0-) = g(0)$, $g(1+) = g(1)$, 于是有

$$w_h^\beta(a)-w_h^\beta(b)=\sum_{s=1}^{l}(g(t_{s-1}+)-g(t_s-))$$

$$+\sum_{s=0}^{l}(g(t_s-)-g(t_s+)). \tag{7.5.2}$$

对(7.5.2)的第一项,利用中值定理可得

$$\left|\sum_{s=1}^{l}(g(t_{s-1}+)-g(t_s-))\right|$$

$$\leqslant\sum_{s=1}^{l}\|x_{s-1}-x_s\|\,|w_h^\beta|_{1,\infty,K_s}.$$

利用相容性的第一个不等式(7.4.1)及 $\|x_{s-1}-x_s\|\leqslant h$ 得

$$\left|\sum_{s=1}^{l}(g(t_{s-1}+)-g(t_s-))\right|$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m}h^{|\alpha|-|\beta|}\sum_{K\in K_h(\overline{ab})}\|w_h^\alpha\|_{0,\infty,K}. \tag{7.5.3}$$

对(7.5.2)式右端第二项,利用定理 7.4.1 证明中的方法可得

$$\left|\sum_{s=0}^{l}(g(t_s-)-g(t_s+))\right|$$

$$\leqslant C\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m}h^{|\alpha|-|\beta|}\sum_{K\in K_h(\overline{ab})}\|w_h^\alpha\|_{0,\infty,K} \tag{7.5.4}$$

综合(7.5.2)—(7.5.4)式可得(7.5.1)式。证毕。

下面给出有限维空间 W_h 的元素的渐近等度连续性质。

引理 7.5.2 设 $\sigma\in(1,\infty)$,$\{W_h\}$ 具有相容性,则存在与 h 无关的常数 C 使得

$$w_h\in W_h,|\beta|<m,|w_h^\beta(a)-w_h^\beta(b)|$$

$$\leqslant C(\|a-b\|+h)\sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m}h^{|\alpha|-|\beta|-1}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{|S_h(\overline{ab})|}\int_{S_h(\overline{ab})}|w_h^\alpha|dx\right\}^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{7.5.5}$$

对所有包含在 Ω 中的线段 $\overline{ab}$ 和 $h\in(0,1)$ 一致成立。

证明 为方便起见，记

$$l = \overline{ab}, \quad S_h = S_h(\overline{ab}).$$

对(7.5.1)式的右端应用引理 7.2.1 及 Hölder 不等式得

$$|w_h^\beta(a) - w_h^\beta(b)| \leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|} \sum_{K \in K_h(l)} h^{-\frac{n}{\sigma}} \|w_h^\alpha\|_{0,\sigma,K}$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|} \Big(\sum_{K \in K_h(l)} 1\Big)^{\frac{1}{\sigma'}} \Big(\sum_{K \in K_h(l)} h^{-n} \|w_h^\alpha\|_{0,\sigma,K}^\sigma\Big)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-\frac{n}{\sigma}} \Big(\sum_{K \in K_h(l)} 1\Big)^{1/\sigma'} \Big(\int_{K_h(l)} |w_h^\alpha|^\sigma dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-\frac{n}{\sigma}} \Big(\sum_{K \in K_h(l)} 1\Big)^{1/\sigma'} |S_h|^{-\frac{1}{\sigma}} \Big\{\int_{S_h} |w_h^\alpha|^\sigma dx\Big\}^{\frac{1}{\sigma}}.$$

对于 $\Big(\sum_{K \in S_h(\overline{ab})} 1\Big)$ 及 $|S_h|$ 有下述估计

$$|S_h| \leqslant (2h)^{n-1}(\|b-a\| + 2h),$$

$$\Big(\sum_{K \in S_h(\overline{ab})} 1\Big) \leqslant \frac{(\|b-a\|+2h)(2h)^{n-1}}{w_n(\eta h)^n}$$

$$\leqslant C(\|b-a\| + h)h^{-1}.$$

因而得到(7.5.5)式．证毕．

对于Ω中的紧集 Γ，定义

$$|\Gamma, R^n - \Omega| = \inf_{y \in \Gamma, x \in R^n - \Omega} \|y - x\|.$$

引理 7.5.3 设 $\sigma \in (1,\infty)$，$\{W_h\}$ 具有相容性，则存在与 h 无关的常数 C 使得．

$$w_h \in W_h,\ |\beta| < m,\ \Big(\int_\Gamma |w_h^\beta(x+d) - w_h^\beta(x)|^\sigma dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant C(\|d\| + h) \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-1} \Big(\int_\Omega |w_h^\beta|^\sigma dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}. \qquad (7.5.6)$$

对任意包含于Ω中的紧集 Γ，任意满足 $\|d\| < |\Gamma, R^n - \Omega|$ 的 $d \in R^n, h \in (0,1)$ 一致成立。

证明 令 w_h^α 在 $R^n - \Omega$ 上为 0，$|\alpha| \leqslant m$。取 $a = x \in \Gamma$，$b = x + d$，则 $\overline{ab} \subset \Omega$，应用引理 7.5.2 得

$$\int_\Gamma |w_h^\beta(x+d) - w_h^\beta(x)|^\sigma dx$$

$$\leqslant C(\|a-b\| + h)^\sigma \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{(|\alpha|-|\beta|-1)\sigma}$$

$$\cdot \frac{1}{|S_h|} \int_\Gamma \left(\int_{S_h(\overline{ab})} |w_h^\alpha|^\sigma dy \right) dx,$$

其中 $S_h = S_h(\overline{od})$，$S_h(\overline{ab}) = x + S_h(\overline{od})$。所以

$$\int_\Gamma \int_{S_h(\overline{ab})} |w_h^\alpha(y)| \sigma dy dx = \int_\Gamma \int_{S_h} |w_h^\alpha(x+z)|^\sigma dz dx$$

$$= \int_{S_h} \int_\Gamma |w_h^\alpha(x+z)|^\sigma dx dz$$

$$\leqslant \int_{S_h} \int_{R^n} |w_h^\alpha(x+z)|^\sigma dx dz$$

$$\leqslant |S_h| \int_\Omega |w_h^\alpha|^\sigma dx.$$

由于可得(7.5.6)式。证明完毕。

引理 7.5.4 设 $\sigma \in (1, \infty)$，$\{W_h\}$ 具有相容性。则存在与 h，ε 无关的常数 C 满足：$\forall \varepsilon \in (0,1)$，存在紧子集 $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega$ 使得

$$\|w_h^\beta\|_{0,\sigma,\Omega} \leqslant C\{\|w_h^\beta\|_{0,\sigma,\Gamma_\varepsilon}$$

$$+ (\varepsilon + h) \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-1} \|w_h^\alpha\|_{0,\sigma,\Omega}\}, \tag{7.5.7}$$

$\forall w_h \in W_h$，$|\beta| < m$，$h \in (0,1)$ 一致成立。

证明 由 K_h 的性质可知，对固定的 h，$\bar{\Omega}$ 是有限个属于 K_h 中的单元 K 的并集。现选定 $h_0 \in (0,1)$。$\forall K \in K_h$，K 具有线段性质，即存在开集族 $\{O_k\}_{k=1}^J$ 和相应的一列向量 $a_1, \cdots, a_J \in R^n$ 满足

$$\partial K \subset \bigcup_{j=1}^{J} O_j,\ K \cap \bar{O}_k + \varepsilon a_k \subset \underline{K},\ 0 < \varepsilon < 1,$$

$$k = 1, \cdots, J. \tag{7.5.8}$$

定义

$$K_0 = K - \bigcup_{k=1}^{J} O_k - \bigcup_{k=1}^{J} K \cap O_k$$

$$K_\varepsilon = K_0 \cup \bigcup_{k=1}^{J} (K \cap \bar{O}_k + \varepsilon a_k),\ 0 < \varepsilon < 1.$$

集 K_0, K_ε 是紧集，而由线段性质(7.5.8) $K_0 \cup K_\varepsilon \subset \underline{K}$，$\varepsilon \in (0,1)$. 对于 $k = 1, \cdots, J$，$x \in \underline{K} \cap O_k$，令 $a = x$，$b = x + \varepsilon a_k$，则线段 $\overline{ab} \subset \underline{K} \subset \Omega$. 在 $R^n - \Omega$ 外定义 $w_n = 0$，记 $d = \varepsilon a_k$，$S_h = S_h(\overline{od})$. 使用引理 7.5.2 得

$$|w_h^\beta(x)| \leqslant |w_h^\beta(x + \varepsilon a_k)| + C(\varepsilon \|a_k\| + h)$$

$$\cdot \sum_{|\alpha| = |\beta| + 1}^{m} \left\{ \frac{1}{|S_h|} \int_{x + S_h} |w_h^\alpha|^\sigma dy \right\}^{\frac{1}{\sigma}} h^{|\alpha| - |\beta| - 1}.$$

将上式两端同在 $\underline{K} \cap O_k$ 上积分得

$$\left(\int_{K \cap O_k} |w_h^\beta|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \left(\int_{K \cap O_k + \varepsilon a_k} |w_h^\beta|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$+ C(\varepsilon \|a_k\| + h) \sum_{|\alpha| = |\beta| + 1}^{m} h^{|\alpha| - |\beta| - 1} \left(\int_\Omega |w_h^\alpha|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant \|w_h^\beta\|_{0, \sigma, K_\varepsilon} + C(\varepsilon \max_k \|a_k\| + h)$$

$$\cdot \sum_{|\alpha| = |\beta| + 1}^{m} h^{|\alpha| - |\beta| - 1} \|w_h^\alpha\|_{0, \sigma, \Omega}.$$

上面用到了下述不等式

$$\int_{R^n} \int_{S_h} |w_h^\alpha(x + y)|^\sigma dy dx \leqslant |S_h| \int_\Omega |w_h^\alpha|^\sigma dx.$$

注意

$$K \subset K_0 \cup \bigcup_{k=1}^{J} K \cap O_k,$$

$K_0 \subset K_\varepsilon$，因而

$$\|w_h^\beta\|_{0,\sigma,K} \leqslant \left(\int_{K_0} |w_h^\beta|^\sigma dx + \sum_{k=1}^{J}\int_{K \cap O_k} |w_h^\beta|^\sigma dx\right)^{1/\sigma}$$

$$\leqslant C(K)\left\{\|w_h^\beta\|_{0,\sigma,K_\varepsilon} + (\varepsilon + h) \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-1}\|w_h^\alpha\|_{0,\sigma,\Omega}\right\}, \tag{7.5.9}$$

其中

$$C(K) = (J+1)^{1/\sigma}(1 + C(\max_k\|a_k\| + 1)).$$

由于 K_{h_0} 中的单元个数 N_{h_0} 是有限的。由(7.4.9)式可得

$$\|w_h^\beta\|_{0,\sigma,\Omega} = \left(\sum_{K \in K_{h_0}} \|w_h^\beta\|_{0,\sigma,K}^\sigma\right)^{1/\sigma}$$

$$\leqslant \max C(K)\left\{\left(\sum_{K \in K_{h_0}} \|w_h^\beta\|_{0,\sigma,K_\varepsilon}^\sigma\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right.$$

$$\left. + (\varepsilon + h)N_{h_0}^{\frac{1}{\sigma}} \sum_{|\alpha|=|\beta|+1}^{m} h^{|\alpha|-|\beta|-1} \cdot \|w_h^\alpha\|_{0,\sigma,\Omega}\right\}.$$

取

$$C = (1 + N_{h_0}^{\frac{1}{\sigma}}) \max_{K \in K_{h_0}} C(K), \quad \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{K \in K_{h_0}} K_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

集合 K_ε 是紧的且 $K_\varepsilon \subset \underline{K}$，因而 $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega$。这样引理 7.5.4 为真。

下面的定理是 $\{W_h\}$ 的弱离散紧致性质。

定理 7.5.1 设 $\sigma \in (1,\infty)$，$\{W_h\}$ 具有相容性。如果 $w_\tau \in W_{h_\tau}$，$\tau \in \mathbf{N}$，$h_\tau \to 0$ 且 w_τ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中弱收敛于0，则有下述强收敛：

$$\lim_{\tau\to\infty} \sum_{|\beta|<m} \|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega} = 0.$$

证明 显然

$$\sup_\tau \|w_\tau\|_{m,\sigma,\Omega} \leqslant \lambda < \infty.$$

令 $|\beta| < m$。$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi$ 具有包含于Ω内的紧支集 $\Gamma = \operatorname{supp}\varphi$。令 $u_\tau = \varphi w_\tau^\beta$，取 $d \in R^n$ 使得 $\|d\| < |\Gamma, R^n - \Omega|$，于

是

$$u_\tau(x+d)-u_\tau(x)=(\varphi(x+d)-\varphi(x))w_\tau^\beta(x+d)$$
$$+\varphi(x)(w_\tau^\beta(x+d)-w_\tau^\beta(x)).$$

进而

$$\left(\int_\Omega |u_\tau(x+d)-u_\tau(x)|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}}\leqslant \|d\||\varphi|_{1,\infty,\Omega}\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}$$
$$+|\varphi|_{0,\infty,\Omega}\left(\int_\Gamma |w_\tau^\beta(x+d)-w_\tau^\beta(x)|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

由引理 7.5.3，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $d\in R^n$，$\|d\|<\min\{\delta,|\Gamma,R^n-\Omega|\}$，$h_\tau<\delta$ 时，

$$\|d\||\varphi|_{1,\infty,\Omega}\lambda\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\varphi|_{0,\infty,\Omega}\left(\int_\Gamma |w_\tau^\beta(x+d)-w_\tau^\beta(x)|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$
$$\leqslant C|\varphi|_{0,\infty,\Omega}(\|d\|+h)\lambda\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

进而有

$$\left(\int_\Omega |u_\tau(x+d)-u_\tau(x)|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{\sigma}}\leqslant\varepsilon.$$

因为 $h_\tau\to 0$，所以存在 ν 使得 $h_\tau<\delta,\tau>\nu$。每个 $u_\tau\in L^\sigma(\Omega)$ $(\tau=1,\cdots,\nu)$都是在 L^σ 平均意义连续的。所以 $\{u_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$ 是 $L^\sigma(\Omega)$ 中的有界和等度连续的序列。因而 $\{u_\tau\}$ 是 $L^\sigma(\Omega)$ 的紧集。w_τ^β 在 $L^\sigma(\Omega)$ 中弱收敛于 0 导出 u_τ 在 $L^\sigma(\Omega)$ 中弱收敛于 0，由 $\{u_\tau\}$ 的紧致性质导出 $\{u_\tau\}$ 在 $L^\sigma(\Omega)$ 中强收敛于 0（当 $\tau\to\infty$时）。

由引理 7.5.4 可知，$\forall\varepsilon\in(0,1)$，存在 $\Gamma_\varepsilon\subset\Omega$ 使得

$$\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}\leqslant C(\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Gamma_\varepsilon}+(\varepsilon+\lambda)\lambda),\tau\in\mathbf{N}.$$

存在 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi$ 在 Γ_ε 上恒为 1，且 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$。令 $u_\tau=\varphi w_\tau^\beta$，显然 $u_\tau|_{\Gamma_\varepsilon}=w_\tau^\beta|_{\Gamma_\varepsilon}$。由证明的前半部分可知

$$\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Gamma_\varepsilon}=\|u_\tau\|_{0,\sigma,\Gamma_\varepsilon}\leqslant\|u_\tau\|_{0,\sigma,\Omega}\to 0,\tau\to\infty,$$

所以

$$\lim_{\tau\to\infty}\sup_{\nu>\tau}\|w_\nu^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}\leqslant C\lambda\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可得定理 7.5.1 的结论。证毕。

定理 7.5.2 设 $\{W_h\}$ 具有相容性，$\sigma\in(1,\infty)$，$j\in\{0,1,\cdots,m-1\}$，$\mu\geqslant\sigma$ 满足：当 $n>(m-j)\sigma$ 时 $\mu<n\sigma/(n-(m-j)\sigma)$；当 $n=(m-j)\sigma$ 时，$\mu<\infty$，当 $n<(m-j)\sigma$ 时 $\mu\leqslant\infty$。若 $w_\tau\in W_{h_\tau}$，$\tau\in\mathrm{N}$，$\lim\limits_{\tau\to\infty}h_\tau=0$，且 w_τ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中弱收敛于 0，则有

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{|\beta|=j}\|w_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}=0.$$

证明 由定理 7.5.1 可知

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{|\beta|=l}\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}=0. \tag{7.5.10}$$

若 $n>(m-j)\sigma,\mu>\sigma$，则令 $\sigma_j=n\sigma/(n-(m-j)\sigma)$。于是 $\mu<\sigma_j$。记

$$s=(\sigma_j-\mu)\sigma/(\sigma_j-\sigma),\quad t=\frac{\sigma}{s}.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{|\beta|=j}\|w_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}^\mu&\leqslant\sum_{|\beta|=j}\left(\int_\Omega|w_\tau^\beta|^s|w_\tau^\beta|^{\mu-s}dx\right)\\&\leqslant\sum_{|\beta|=j}\left(\int_\Omega|w_\tau^\beta|^{st}dx\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_\Omega|w_\tau^\beta|^{(\mu-s)t'}dx\right)^{1/t'}\\&=\sum_{|\beta|=j}\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}^{\sigma/t}\|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma_j,\Omega}^{\sigma_j/t'}.\end{aligned}\tag{7.5.11}$$

由(7.5.10)式和定理 7.4.1 可知

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{|\beta|=j}\|w_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}=0.$$

若 $n=(m-j)\sigma,\mu>\sigma,\mu<\infty$，在(7.5.11)式中取 $\sigma_j>\mu$，再利用定理 7.4.1 就可得定理的结论。

若 $n<(m-j)\sigma$，$\mu\in(\sigma,\infty]$，则取 $\gamma<\sigma$ 使得 $n<(m-$

$j)\gamma$. 定理 7.4.1 给出

$$\sum_{|\beta|=j} \|w_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega} \leqslant C\|w_\tau\|_{m,\gamma,\Omega}.$$

因为嵌入映射 $L^{m,\gamma}(\Omega) \to L^{m,\sigma}(\Omega)$ 是紧的，所以定理的结论成立。证毕。

定理 7.5.3 设 $\sigma \in (1,\infty)$，$j \in \{0,1,\cdots,m-1\}$，$\mu \geqslant \sigma$ 满足：$n > (m-j)\sigma$ 时 $\mu < n\sigma/(n-(m-j)\sigma)$，$n = (m-j)\sigma$ 时 $\mu < \infty$，$n < (m-j)\sigma$ 时 $\mu \leqslant \infty$。如果 $\{W_h\}$ 具有相容性，$\{W_h, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性，且对 $\forall w \in W^{m,\sigma}(\Omega)$，

$$\lim_{h\to 0} \inf_{w_h \in W_h} \left\{\|w - w_h\|_{m,\sigma,\Omega} + \sum_{|\beta|=j} \|D^\beta w - w_h^\beta\|_{0,\mu,\Omega}\right\} = 0.$$

则有结论：对任意在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中有界的序列 $u_\tau \in W_{h_\tau}$，$\tau \in \mathbf{N}$，当 $\lim\limits_{\tau\to\infty} h_\tau = 0$ 时，存在 N 的子列 N′ 和 $u_\infty \in W^{m,\sigma}(\Omega)$，使得 $\{u_\tau\}_{\tau\in \mathbf{N}'}$ 弱收敛于 u_∞，且

$$\lim_{\tau\to\infty, \tau\in \mathbf{N}'} \sum_{|\beta|=j} \|D^\beta u_\infty - u_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega} = 0.$$

如果 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 换成 $\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$，上述结论仍然成立。

证明 由 $\{W_h, W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性可得，存在 N 的子列 N′ 和 $u_\infty \in W^{m,\sigma}(\Omega)$ 使得 $\{u_\tau\}_{\tau\in\mathbf{N}'}$ 弱收敛于 u_∞。另外，由定理的条件，存在 $\varphi_\tau \in W_h$，使得

$$\lim_{\tau\to\infty}\left\{\|u_\infty - \varphi_\tau\|_{m,\sigma,\Omega} + \sum_{|\beta|=j} \|D^\beta u_\infty - \varphi_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}\right\} = 0.$$

因而 $\{\varphi_\tau - u_\tau\}_{\tau\in\mathbf{N}'}$ 弱收敛于 0。由于

$$\sum_{|\beta|=j} \|D^\beta u_\infty - u_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}$$

$$\leqslant \sum_{|\beta|=j} (\|D^\beta u_\infty - \varphi_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega} + \|u_\tau^\beta - \varphi_\tau^\beta\|_{0,\mu,\Omega}),$$

从定理 7.5.2 推得定理的结论。证毕。

定理 7.5.4 令 $m = 1$ 或 $m = n = 2$，$\sigma \in (1,\infty)$，$j \in \{0,1,\cdots,m-1\}$。设 k, μ_j 满足：$\mu \geqslant \sigma$，当 $n > (m-j)\sigma$ 时 $n > k > n-(m-j)\sigma$ 且 $\mu_j < k\sigma/(n-(m-j)\sigma)$；当 $n = (m-$

$j)\sigma$ 时 $k\in\{1,\cdots,n-1\}$ 且 $\mu_j<\infty$，则下述结论为真：

(1) 若 $\{W_h\}$ 具有相容性，则当 $w_\tau\in W_{h_\tau}$，$\tau\in\mathbf{N}$，且 $\{w_\tau\}$ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中弱收敛于 0，h_τ 收敛于 0 时，有

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{|\beta|=j}\|w_\tau^\beta\|_{0,\mu_j,\Omega^k}=0.$$

(2) 设 $\{W_h\}$ 具有相容性，$\{W_h,W^{m,\sigma}(\Omega)\}$ 具有弱闭性，且对 $\forall w\in W^{m,\sigma}(\Omega)$，

$$\lim_{h\to 0}\inf_{w_h\in W_h}\left(\|w-w_h\|_{m,\sigma,\Omega}+\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta w-w_h^\beta\|_{0,\mu_j,\Omega^k}\right)=0,$$

则当 $w_\tau\in W_{h_\tau}$，$\tau\in\mathbf{N}$，$\{w_\tau\}$ 在 $L^{m,\sigma}(\Omega)$ 中弱收敛于 $w_\infty\in W^{m,\sigma}(\Omega)$ 且 $h_\tau\to 0$ 时，有

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta w_\infty-w_\tau^\beta\|_{0,\mu_j,\Omega^k}=0.$$

如果将 $W^{m,\sigma}(\Omega)$ 换成 $\mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$，结论仍然成立。

证明 (1) 首先考虑 $m=1$，$n>\sigma$ 的情形。选择 ξ 满足：$n-\xi<k$，$\mu<k\xi/(n-\xi)$，$1<\xi<\sigma$。在(7.4.55)式中将 σ 改为 ξ，q_j 取为

$$k\xi/(n-\xi),\ q=n\xi/(n-\xi)<\frac{n\sigma}{(n-\sigma)},$$

则

$$\begin{aligned}&\|w_\tau^0\|_{0,q_j,\Omega^k}\\&\leqslant C\left\{\|w_\tau^0\|_{0,q,\Omega}^{(\xi-\nu)q/\xi}+h_\tau^{(\xi-\nu)q/\xi}\sum_{|\beta|=1}\|w_\tau^\beta\|_{0,q,\Omega}^{(\xi-\nu)q/\xi}\right\}^{\frac{\blacksquare}{q_j\delta}}\\&\quad\times\left\{\sum_{|\beta|\leqslant 1}\|D^\beta w_\tau^0\|_{0,\xi,\Omega}^{\nu}+\sum_{|\beta|=1}\|w_\tau^\beta\|_{0,\xi,\Omega}^{\nu}\right\}^{\frac{\blacksquare}{q_j\delta}}.\end{aligned}\tag{7.5.12}$$

由定理 7.5.2 得

$$\lim_{\tau\to\infty}\|w_\tau^0\|_{0,q,\Omega}=0.\tag{7.5.13}$$

由不等式(7.2.1)得

$$h_\tau \sum_{|\beta|=1} \|w_\tau^\beta\|_{0,q,\Omega} \leqslant Ch_\tau^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{\sigma}} \sum_{|\beta|=1} \|w_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}.$$

因为

$$1+\frac{n}{q}-\frac{n}{\sigma}=n(\sigma-\xi)/(\sigma\xi)>0,$$

所以

$$\lim_{\tau\to\infty} h_\tau \sum_{|\beta|=1} \|w_\tau^\beta\|_{0,q,\Omega}=0. \tag{7.5.14}$$

由(7.5.12)—(7.5.14)式得

$$\lim_{\tau\to\infty} \|w_\tau^0\|_{0,q_j,\Omega^k}=0,$$

所以当 $m=1, n>\sigma$ 时定理的结论 (1)成立.

若 $m=1, n=\sigma$, 则取 $1<\xi<\sigma$, 使得 $n-\xi<k$, $\mu_j<k\xi/(n-\xi)$. 利用上法可得期望的结果. 对于 $m=n=2, j=1$ 的情形类似地可证. 结论 (1) 得证.

(2) 由条件可知: 存在 $v_\tau \in W_{h_\tau}$ 使得

$$\lim_{\tau\to\infty}\left(\|w_\infty-v_\tau\|_{m,\sigma,\Omega}+\sum_{|\beta|=j}\|D^\beta w_\infty-v_\tau^\beta\|_{0,\mu_j,\Omega^k}\right)=0.$$

于是 $\{w_\tau-v_\tau\}$ 弱收敛于 0. 由结论 (1),上式和三角不等式可证结论 (2) 为真. 证毕.

由定理 7.1.1, 定理 7.4.3, 定理 7.5.3 和定理 7.5.4 直接推出定理 7.1.4.

定理 7.1.5 的证明 用反证法,假设(7.1.17)式不成立,则存在 h_τ 和 $v_\tau \in \mathring{W}_{h_\tau}^m, \tau\in \mathrm{N}$, 使得 $h_\tau\to 0$ 且

$$1=\|v_\tau\|_{m,\sigma,\Omega}>\tau|v_\tau|_{m,\sigma,\Omega},\quad \tau\in\mathrm{N}. \tag{7.5.15}$$

由定理 7.1.4,不妨设 v_τ 弱收敛于 $v_0\in \mathring{W}^{m,\sigma}(\Omega)$,且

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{|\beta|<m}\|D^\beta v_0-v_\tau^\beta\|_{0,\sigma,\Omega}=0.$$

于是 $\{v_\tau\}$ 是 $L^{m,\sigma}_*(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 进而 v_τ 强收敛于 v_0. (7.5.15)式左端给出 $\|v_0\|_{m,\sigma,\Omega}=1$. 右端给出 $|v_0|_{m,\sigma,\Omega}=0$, 即 $v_0=0$. 矛盾! 所以(7.1.17)式为真. 同样可证明不等式 (7.1.

18)和(7.1.19). 证毕.

引理 7.5.1 至引理 7.5.4 和定理 7.5.1 的证明方法引自文[63]. 引理 7.2.1 证明的方法,即将一般单元情形化为标准单元的情形然后再返回一般单元的技巧,通常称为仿射变换技巧. 与此对应,称引理 7.1.2 的证明方法为仿射连续和尺度不变技巧.

第八章　有限元方法

第五至七章，从有限元空间的构造开始，直到建立了有限元空间的基本性质，这些为应用有限元空间近似求解微分方程奠定了基础．本章着手一些解线性定常问题的有限元方法的收敛性和误差估计的讨论．这些问题包括：二阶线性椭圆边值问题，薄板弯曲问题，定常 Stokes 方程和弹性力学方程组等．

第一节讨论抽象变分问题的有限维逼近问题．使用的工具是 Lax-Milgram 引理和 Brezzi 定理．有限维逼近问题的解的收敛性化三个方面：有限维变分问题的弱强制性，有限维空间的逼近性和有限维空间的弱闭性．

第二、三、四节，利用第一节的抽象结果和有限元空间的基本性质，分别在有限元的基本假设 H_m 下，证明二阶椭圆边值问题，薄板弯曲问题，定常 Stokes 方程的有限元解的存在性，收敛性和误差估计．

最后，第五节讨论弹性力学方程组的有限元方法．分析这一问题的解的收敛性的困难是：有限元空间上的双线性泛函的弱强制性难以得到，因而第一节的抽象讨论失去作用．所以走另一条路解决有限元解的收敛性．

§8.1　抽象变分问题的有限维逼近

设 X 是 Hilbert 空间．记其内积是 $(\cdot,\cdot)_X$，相应的范数是 $\|\cdot\|_X$，X 的对偶空间记为 X'．

设 $a(\cdot,\cdot)$ 是定义在 X 上的双线性泛函，即当 $u,v\in X$ 时，$a(u,v)$ 在 u 固定时是 v 的线性泛函，在 v 固定时是 u 的线性泛函．称 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的，如果存在常数 μ_1 使得

$$|a(u,v)| \leqslant \mu_1 \|u\|_X \|v\|_X, \forall u,v \in X. \tag{8.1.1}$$

设 X_0 是X的闭子空间. 称 $a(\cdot,\cdot)$ 是 X_0 弱强制的，如果存在常 μ_2 使得

$$\inf_{0 \neq u \in X_0} \sup_{0 \neq v \in X_0} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|_X \|v\|_X} \geqslant \mu_2 > 0. \tag{8.1.2}$$

称 $a(\cdot,\cdot)$ 是 X_0 椭圆的,如果存在常数 $\mu_3 > 0$ 使得

$$\forall u \in X_0, \mu_3 \|u\|_X^2 \leqslant a(u,u). \tag{8.1.3}$$

显然，$a(\cdot,\cdot)$ 是 X_0 椭圆的,一定是 X_0 弱强制的. 设 $f(\cdot)$ 是X上的线性连续泛函. 考虑下述变分问题:

$$u_0 \in X_0, a(u_0,v) = f(v), \forall v \in X_0. \tag{8.1.4}$$

关于(8.1.4)解的存在唯一性,有下述 Lax-Milgram 引理.

定理 8.1.1 设 $a(\cdot,\cdot)$ 是X上的双线性连续泛函. 问题(8.1.4) $\forall f \in X'$ 有唯一解 u_0 的充要条件是: $a(\cdot,\cdot)$ 是 X_0 弱强制的且

$$\forall v \in X_0 - \{0\}, \sup_{u \in X_0} |a(u,v)| > 0. \tag{8.1.5}$$

证明 对每个 $u \in X_0$, 线性泛函: $v \in X_0 \to a(u,v)$ 是连续性,所以存在 X_0' 中唯一元素 Au 满足

$$\forall v \in X_0, a(u,v) = Au(v). \tag{8.1.6}$$

Au 的范数有下述估计

$$\|Au\|_{X_0'} = \sup_{0 \neq v \in X_0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|_X} \leqslant \mu_1 \|u\|_X,$$

所以线性算子 $A: X_0 \to X_0'$ 是连续的. 记 X_0 到 X_0' 的线性连续算子的范数为 $\|\cdot\|_{L^1(X_0,X_0')}$, 则

$$\|Au\|_{L^1(X_0,X_0')} \leqslant \mu_1. \tag{8.1.7}$$

充分性. 若(8.1.5)成立, 则 $AX_0 = X_0'$, 所以 $\forall f \in X_0'$, 都有 $u \in X_0$ 满足 $Au = f$. X_0 弱强制性说明

$$\|Au\|_{X_0'} \geqslant \mu_2 \|u\|_X, \forall u \in X_0,$$

即A是一对一的, 所以A具有有界逆算子 $A^{-1}: X_0' \to X_0$, 且

$$\|A^{-1}\|_{L^1(X_0',X_0')} \leqslant \frac{1}{\mu_2}. \tag{8.1.8}$$

因而证明(8.1.4) $\forall f\in X_0'$ 都有唯一解 u_0. $\forall f\in X', f$ 在 X_0 上的限制 $\tilde{f}\in X_0'$. 所以充分性得证.

必要性. 设 $f\in X_0'$, 则 f 可以延拓到 X' 中的元素 $\hat{f}$ 且 $\|\hat{f}\|_{X'}=\|f\|_{X_0'}$, $\hat{f}(v)=f(v)$, $\forall v\in X_0$, 所以存在唯一的 $u\in X_0$ 使得 $Au=f$. 这说明 A 是 $X_0\to X_0'$ 的一对一映上的线性算子. 由闭图象定理可知, A 具有有界逆 $A^{-1}:X_0'\to X$. 设 A^{-1} 的界是 $\frac{1}{\mu_2}$, 则得 $a(\cdot,\cdot)$ 是 X_0 弱强制的.

如果 $v\in X_0-\{0\}$, 由 Hahn-Banach 定理可知有 $f\in X_0', f(v)\neq 0$. 因而存在 $u\in X_0$ 满足 $Au=f$, 所以 $a(u,v)=Au(v)=f(v)\neq 0$, 即(8.1.5)式成立. 证毕.

推论 8.1.1 若(8.1.1), (8.1.2)和(8.1.5)式成立, 则(8.1.4)的解 u_0 满足

$$\|u_0\|\leqslant\frac{1}{\mu_2}\|f\|_{X'}. \tag{8.1.9}$$

(8.1.9)式由(8.1.8)式直接得到.

现在考虑(8.1.4)的有限维逼近问题. 对于 $h\in(0,1)$, 设 X_h 是 X 中的有限维空间. 问题(8.1.4)的有限维逼近问题是

$$u_h\in X_h, a(u_h,v_h)=f(v_h), \forall v_h\in X_h. \tag{8.1.10}$$

X_h 可以不包含于 X_0 中, 此时是(8.1.4)的'不协调'有限维逼近. 如果 $X_h\subset X_0$, 则称为是协调的. 为了保证解的唯一存在性, 要加上一些条件. 称 $\{X_h\}$ 是一致弱强制的, 如果存在 $h_0\in(0,1]$ 和与 h 无关的常数 C 使得

$$\inf_{0\neq v_h\in X_h}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|a(v_h,w_h)|}{\|v_h\|_X\|w_h\|_X}\geqslant C>0, \tag{8.1.11}$$

$\forall h\in[0,h_0)$ 一致成立.

定理 8.1.2 设 $a(\cdot,\cdot)$ 是双线性连续泛函, $f\in X'$, $\{X_h\}$ 是一致弱强制的. 则 $\forall h\in(0,h_0)$, 问题 (8.1.10) 有唯一解 u_h. 若 u_0 是问题(8.1.4)的解, 则下述不等式

$$\|u_0-u_h\|_X\leqslant C\Big\{\inf_{v_h\in X_h}\|u_0-v_h\|_X$$

$$+\sup_{0\neq v_h\in X_h}\frac{|a(u_0,v_h)-f(v_h)|}{\|v_h\|_X}\Big\}, \tag{8.1.12}$$

$\forall h\in(0,h_0)$ 成立，其中 C 是与 h 和 u_0 无关的常数。

证明 由于 $X_h, h\in(0,h_0)$，是有限维的，所以证明(8.1.10)有唯一解，只须证明

$$\forall \tilde{u}_h\in X_h, a(\tilde{u}_h,v_h)=0, \forall v_h\in X_h$$

只有零解．事实上，如果 $\tilde{u}_h$ 是上述问题的解，由(8.1.11)式得 $\tilde{u}_h=0$。

令 $v_h\in X_h$，(8.1.11) 式给出

$$\begin{aligned}\|v_h-u_h\|_X&\leqslant C\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|a(v_h-u_h,w_h)|}{\|w_h\|_X}\\&\leqslant C\left\{\|u_0-v_h\|_X+\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|a(u_0,w_h)-a(u_h,w_h)|}{\|w_h\|_X}\right\}.\end{aligned}$$

由于 u_h 是(8.1.10)的解，所以

$$\begin{aligned}\|u_0-u_h\|_X&\leqslant\|u_0-v_h\|_X+\|v_h-u_h\|_X\\&\leqslant C\left\{\|u_0-v_h\|_X+\sup_{w_h\in X_h}\frac{|a(u_0,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_X}\right\},\end{aligned}$$

由 v_h 的任意性得(8.1.12)式．证毕。

定理 8.1.2 说明，(8.1.10)的解 u_h 与(8.1.4)的解 u_0 的误差可由两部分控制，一部分是 u_0 到空间 X_h 的距离，另一部分是不协调性引起的误差．如果 $X_h\subset X_0$，则第二部分为 0。

引理 8.1.1 设 (8.1.11) 式成立，则 (8.1.10) 的解 u_h 收敛于(8.1.4)的解 u_0 充要条件是

$$\lim_{h\to 0}\inf_{v_h\in X_h}\|u_0-v_h\|_X=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|a(u_0,w_h)-f(w_h)|}{\|w_h\|_X}=0. \tag{8.1.13}$$

证明 设 $\lim\limits_{h\to 0}\|u_0-u_h\|_X=0$．记 P_h 是 $X\to X_h$ 的正交投影算子，则

$$\|u_0-u_h\|_X^2=\|u_0-P_hu_0\|_X^2+\|u_h-P_hu_0\|_X^2. \tag{8.1.14}$$

所以

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{h\to 0}\|u_0 - P_h u_0\|_X = \lim\limits_{h\to 0}\inf\limits_{v_h\in X_h}\|u_0 - v_h\|_X = 0, \\
\lim\limits_{h\to 0}\|u_h - P_h u_0\|_X = 0.
\end{cases}
\tag{8.1.15}
$$

而

$$
\begin{aligned}
a(u_0, w_h) - f(w_h) &= a(u_0, w_h) - a(u_h, w_h) \\
&= a(u_0 - P_h u, w_h) + a(P_h u_0 - u_h, w_h),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|a(u_0, w_h) - f(w_h)|}{\|w_h\|_X} \\
&\leqslant \lim_{h\to 0}\left\{\sup_{w_h\in X_h}\frac{|a(u_0 - P_h u_0, w_h)|}{\|w_h\|_X}\right. \\
&\qquad \left. + \sup_{w_h\in X_h}\frac{|a(P_h u_0 - u_h, w_h)|}{\|w_h\|_X}\right\} \\
&\leqslant \lim_{h\to 0}(\|u_0 - P_h u_0\|_X + \|P_h u_0 - u_h\|_X).
\end{aligned}
$$

由(8.1.15)式可知，(8.1.13)的第二等式成立。必要性成立。充分性由(8.1.12)式直接得到。证毕。

引理 8.1.2 $\{X_h, X_0\}$ 是弱闭的等价于由 $\forall v\in X_0, f(v) = 0$，推出

$$
\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|f(w_h)|}{\|w_h\|_X} = 0, \forall f\in X'. \tag{8.1.16}
$$

证明 设 $\{X_h, X_0\}$ 是弱闭的，令 $f\in X'$ 且 $\forall v\in X_0$，$f(v)=0$。记 N′ 是 N 的子列，满足 $h_\tau\in(0,1), \tau\in N', h_\tau\to 0$，且

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\sup_{h'<h}\sup_{w_h\in X_h}\frac{|f(w_h)|}{\|w_h\|_X} \\
&\qquad = \lim_{\tau\to\infty}\sup_{w\in X_{h_\tau}}\frac{|f(w)|}{\|w\|_X}.
\end{aligned}
$$

由 Riesz 表现定理，存在 $w_\tau\in X_{h_\tau}$ 满足 $(w_\tau, w)_X = f(w), \forall w\in X_{h_\tau}$。于是

$$
\sup_{0\neq w\in X_{h_\tau}}\frac{|f(w)|}{\|w\|_X} = \|w_\tau\|_X.
$$

显然 $\sup_{\tau\in N'}\|w_\tau\|_X < \infty$. 所以存在 N′ 的子列 N″ 和 $w_\infty \in X_0$ 使得 $\{w_\tau\}_{\tau\in N''}$ 弱收敛于 w_∞. 于是

$$\lim_{\tau\to\infty}\|w_\tau\|_X^2 = \lim_{\tau\to\infty}|f(w_\tau)| = |f(w_\infty)| = 0.$$

所以得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|f(w_h)|}{\|w_h\|_X} = 0.$$

必要性得证.

反过来,设 $\forall f\in X'$, 如果 $f(v)=0$, $\forall v\in X_0$, 则(8.1.16)式为真. 令 $v_\tau\in X_{h_\tau}$, $\tau\in N$, 且 $h_\tau\to 0$, $\{v_\tau\}$ 弱收敛于 v_∞. 由(8.1.16)式得

$$|f(v_\infty)| = \lim_{\tau\to\infty}|f(v_\tau)| = 0.$$

即 $v_\infty\in X_0$. 充分性得证. 证毕.

定理 8.1.3 设问题(8.1.4) $\forall f\in X'$ 都有唯一解. 若(8.1.11)式为真,则 $\forall f\in X'$,(8.1.10)的解 u_h 收敛于(8.1.4)的解 u_0 等价于下述两条为真: (1) $\{X_h,X_0\}$ 具有逼近性:

$$\forall v\in X_0,\ \lim_{h\to 0}\inf_{v_h\in X_h}\|v-v_h\|_X = 0;$$

(2) $\{X_h,X_0\}$ 具有弱闭性.

证明 充分性由引理 8.1.2 和定理 8.1.2的结论直接可得. 现在证明必要性. $\forall u\in X_0$, 定义$f(v)=a(u_0,v),\forall v\in X$. 则(8.1.4)有唯一解 u_0,且(8.1.10) 的解 $u_h\in X_h$ 收敛于 u. 这样就证明了 $\{X_h,X_0\}$ 具有逼近性. 设 $f\in X'$, $f(v)=0$, $\forall v\in X_0$. 则(8.1.4)的解 $u_0=0$. 由引理 8.1.1 得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq w_h\in X_h}\frac{|f(w_h)|}{\|w_h\|_X} = 0.$$

由引理 8.1.2 得 $\{X_h,X_0\}$ 是弱闭的. 证毕.

定理 8.1.3 将抽象变分问题(8.1.4)的有限维逼近问题(8.1.10)的解的收敛性归结为: $a(\cdot,\cdot)$ 使得 $\{X_h\}$ 是一致弱强制的,$\{X_h,$

$X_0\}$ 具有逼近性，$\{X_h, X_0\}$ 具有弱闭性。

下面讨论问题(8.1.4)的一种特殊情况并介绍相应的Brezzi理论[49]。

设 V, W 是实 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是定义在 V 上的双线性连续泛函，$b(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $V\times W$上的双线性连续泛函，即对于 $(v,\varphi)\in V\times W$，$b(v,\varphi)$ 在 φ 是固定时是 v 的线性连续泛函，在 v 固定时是 φ 的线性连续泛函。$\forall(f,g)\in V'\times W'$，考虑下述问题：求 $(u,\phi)\in V\times W$ 满足

$$\begin{cases}a(u,v)+b(v,\phi)=f(v), \forall v\in V,\\ b(u,\varphi)=g(\varphi), \qquad \forall\varphi\in W.\end{cases} \tag{8.1.17}$$

问题(8.1.17)是问题(8.1.4)的特殊情形，因为对 $\forall(v,\varphi)\in V\times W$，$(w,\xi)\in V\times W$，定义

$$\tilde{a}((v,\varphi),(w,\xi))=a(v,w)+b(w,\varphi)+b(v,\xi), \tag{8.1.18}$$

则问题(8.1.17)等价于下述问题：

$$(u,\phi)\in V\times W,$$

$$\tilde{a}((u,\phi),(v,\varphi))=f(v)+g(\varphi), \forall(v,\varphi)\in V\times W. \tag{8.1.19}$$

我们讨论问题(8.1.17)的唯一可解性条件。定义线性有界算子

$$A: V\to V', B: V\to W', B': W'\to V'$$

如下：

$$Av(w)=a(v,w), \forall v,w\in V, \tag{8.1.20}$$

$$Bv(\varphi)=B'\varphi(v)=b(v,\varphi), \forall(v,\varphi)\in V\times W \tag{8.1.21}$$

令 $\Lambda: V\times W\to V'\times W'$ 如下

$$\Lambda(v,\varphi)=\begin{pmatrix}Av+B'\varphi\\ Bv\end{pmatrix}, \forall(v,\varphi)\in V\times W. \tag{8.1.22}$$

则(8.1.17)可以写成

$$(u,\phi)\in V\times W, \ \Lambda(u,\phi)=\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}. \tag{8.1.23}$$

记 $\mathring{V}$ 是B的零空间：$\mathring{V}=\{v \mid v\in V, \ b(v,\varphi)=0, \forall\varphi\in W\}$。记 $\mathring{V}'$ 是 $\mathring{V}$ 的对偶空间，它可与 V' 中由所有满足 $f(v)=0, \forall v\in V$ 且 $(v,w)_V=0, \forall w\in\mathring{V}$ 的 f 构成的闭子空间相等。记 $\Pi: V'\to$

$\mathring{V}'$ 是 V' 到 $\mathring{V}'$ 的正交投影算子.

定理 8.1.4 方程(8.1.17) $\forall(f,g)\in V'\times W'$ 有唯一解的充要条件是: ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的同构映射且存在正常数 μ_3 使得

$$\sup_{0\neq v\in V}\frac{|b(v,\varphi)|}{\|v\|_V}\geqslant\mu_3\|\varphi\|_W,\forall\varphi\in W. \qquad (8.1.24)$$

证明 设方程 (8.1.17) $\forall(f,g)\in V'\times W'$ 都有唯一解, 即 (8.1.23) $\forall(f,g)\in V'\times W'$ 有唯一解. 由闭图像定理可知, Λ: $V\times W\to V'\times W'$ 具有有界逆 $\Lambda^{-1}:V'\times W'\to V\times W$. 对 $\forall g\in W'$, 定义 Sg 是 $\Lambda^{-1}(0,g)$ 的第一分量, 即 $w=Sg$ 等价于存在 $\chi\in W$, $\Lambda(w,\chi)=(0,g)$. 由(8.1.21)式可得 BS 是恒等算子 I. 由 Risze 表现定理可知,存在 $J_W:W'\to W$ 使得, $\forall g\in W'$,

$$(J_Wg,w)_W=g(w),\forall w\in W.$$

对 $\forall\varphi\in W$, 当 $\varphi\neq0$ 时,

$$\sup_{0\neq v\in V}\frac{|b(v,\varphi)|}{\|v\|_V}=\sup_{0\neq v\in V}\frac{|Bv(\varphi)|}{\|v\|_V}$$

$$\geqslant\frac{|BSJ_W^{-1}\varphi(\varphi)|}{\|SJ_W^{-1}\varphi\|_V}=\frac{\|\varphi\|_W^2}{\|SJ_W^{-1}\varphi\|_V}.$$

由于 S 是有界的,所以存在常数 $\mu_3>0$ 使得

$$\|SJ_W^{-1}\varphi\|_V\leqslant\mu_3^{-1}\|\varphi\|_W,$$

进而(8.1.24)成立.

$\forall f\in\mathring{V}'$, 记 Qf 是 $\Lambda^{-1}(f,0)$ 的第一个分量,即 $w=Qf$ 等价于存在 $\chi\in W,\Lambda(w,\chi)=(f,0)$. 由于 $\forall\varphi\in W,\Pi B'\varphi=0$, 所以从(8.1.22)推断 $\Pi AQf=\Pi f=f$. 所以 ΠAQ 是 $\mathring{V}'$ 到 $\mathring{V}'$ 的恒等映射,即 $\Pi A\mathring{V}=\mathring{V}'$. 若 $z\in\mathring{V}$ 且 $\Pi Az=0$, 由(8.1.24)式和闭图像定理推得存在$\Phi\in W$使得 $B'\Phi=-Az$, 因此$\Lambda(z,\Phi)=0$. 所以 $z=0$. 即 ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的一对一映射而且是连续的, 所以 ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的同构映射. 必要性得证.

反过来,设 ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的同构映射且(8.1.24)成立. 由(8.1.24)式, $\forall g\in W'$ 存在 $\bar{u}$ 使得 $B\bar{u}=g$. 令 $u=w+\bar{u}$, 则

问题(8.1.23)等价于

$$\Lambda(w,\phi)=(f-A\bar{u},0). \tag{8.1.25}$$

由此可得,(8.1.23) $\forall(f,g)$ 有唯一解,等价于Λ在 $\mathring{V}\times W$ 上的缩像 Λ_0 是 $\mathring{V}\times W\to V'\times\{0\}$ 的同构映射. 令 $f\in V'$, 由 ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的同构映射, 存在唯一的 $w\in\mathring{V}$ 满足 $\Pi Aw=\Pi f$. 由于 $\Pi(Aw-f)=0$, 所以

$$(Aw-f)(v)=0,\forall v\in\mathring{V}.$$

进而存在唯一的$\phi\in W$满足 $B'\phi=f-Aw$. 这一结论可证明如下. 定义 $V/\mathring{V}$ 是商空间,由(8.1.24)式推断

$$\sup_{0\neq\{v\}\in V/\mathring{V}}\frac{B'\varphi(\{v\})}{\|\{v\}\|_{V,\mathring{V}}}\geqslant\mu_3\|\varphi\|_W,\quad\forall\varphi\in W. \tag{8.1.26}$$

而且 $\forall\{\tilde{v}\}\in V/\mathring{V},\{\tilde{v}\}\neq\{0\}$,

$$\sup_{\varphi\in W}|B'\varphi(\{\tilde{v}\})|>0.$$

所以由定理 8.1.1 得所需结论.

上面的讨论说明, $\forall f\in V'$, 存在唯一的 $(w,\phi)\in\mathring{V}\times W$ 满足 $\Lambda_0(w,\phi)=(f,0)$, 即 Λ_0 是连续的,一对一映上的,所以是同构映射. 充分性得证. 证毕.

下面给出逆算子 Λ^{-1} 的界. 记

$$\mu_4=\inf_{0\neq v\in V}\sup_{0\neq w\in\mathring{V}}\frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V\|w\|_V},$$

$$c_1=\sup_{0\neq v,w\in V}\frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V\|w\|_V},$$

$$c_2=\sup_{0\neq(v,\varphi)\in V\times W}\frac{|b(v,\varphi)|}{\|v\|_V\|\varphi\|_W},$$

$$\gamma(c_1,\mu_4,\mu_3)=2\max\{(\mu_4^{-1}+\mu_3^{-1}(1+c_1\mu_4^{-1}),\ (\mu_3^{-1}+c_1\mu_3^{-2})(1+c_1\mu_4^{-1})\}.$$

定理 8.1.5 设 ΠA 是 $\mathring{V}$ 到 $\mathring{V}'$ 的同构映射且(8.1.24)成立,则

$$\inf_{0\neq(u,\phi)\in V\times W}\sup_{0\neq(v,\varphi)\in V\times W}\frac{|a(u,v)+b(v,\phi)+b(u,\varphi)|}{(\|u\|_V+\|\phi\|_W)(\|v\|_V+\|\varphi\|_W)}$$

$$\geqslant \gamma(c_1,\mu_4,\mu_3). \tag{8.1.27}$$

证明 只须证明 $\Lambda^{-1}: V'\times W' \to V\times W$ 的范数满足

$$\|\Lambda^{-1}\| \leqslant \gamma(c_1,\mu_4,\mu_3). \tag{8.1.28}$$

令 $(f,g)\in V'\times W'$，记 $(u,\phi)=\Lambda^{-1}(f,g)$，即

$$\begin{cases} Au + B'\phi = f, \\ Bu = g. \end{cases}$$

从(8.1.24)式推得，存在 $w\in V$ 满足 $Bw = g$ 且

$$\|w\|_V \leqslant \mu_3^{-1}\|g\|_{W'}.$$

令 $v = u - w$，则 $\Pi Av = \Pi f - \Pi Aw$，于是

$$\|v\|_V \leqslant \mu_4^{-1}(\|f\|_{V'} + c_1\|w\|_V),$$

$$\|u\|_V \leqslant \|v\|_V + \|w\|_V \leqslant \mu_4^{-1}\|f\|_{V'} + \mu_3^{-1}(1 + c_1\mu_4^{-1})\|g\|_{W'}. \tag{8.1.29}$$

而 $\|B'\phi\|_{V'} \leqslant \|f\|_{V'} + \|Au\|_{V'} \leqslant \|f\|_{V'} + c_1\|u\|_V$，由(8.1.24)式得 $\|\phi\|_W \leqslant \mu_3^{-1}\|f\|_{V'} + \mu_3^{-1}c_1\|u\|_V$，再由(8.1.29)式得(8.1.28)式，证毕.

问题 (8.1.17) 的有限维逼近问题将在第四节以 Stokes 方程为例进行讨论.

§8.2 二阶椭圆边值问题的有限元方法

设 Ω 是 R^n 中的多胞形域，考虑二阶椭圆边值问题：

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j u + a_0 u = f, \text{在}\,\Omega\,\text{内}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

其中 $f\in L^2(\Omega)$，a_{ij}, a_j, a_0 均是 $\bar{\Omega}$ 上足够光滑的函数，且存在正常数 α 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_ib_j \geqslant \alpha\|b\|^2, \forall b\in R^n. \tag{8.2.2}$$

定义

$$a(w,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}w^{e_i}v^{e_j}dx+\int_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j w^{e_j}v^0+a_0w^0v^0\right)dx,$$

$$\forall w,v\in L^{1,2}(\Omega), \tag{8.2.3}$$

$$f(v)=\int_{\Omega}fv^0dx,\forall v\in L^{1,2}(\Omega). \tag{8.2.4}$$

不难验证 $a(\cdot,\cdot),f(\cdot)$ 分别是 $L^{1,2}(\Omega)$ 上的双线性泛函和线性泛函并且是连续的。由第三章可知，问题(8.2.1)的弱形式是

$$u_0\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega),a(u_0,v)=f(v),\forall v\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega) \tag{8.2.5}$$

如果 $a_j=0,1\leqslant j\leqslant n,a_0\geqslant 0$，由(8.2.2)式和 Poincarè-Friedrichs 不等式可知 $a(\cdot,\cdot)$ 是椭圆的，所以(8.2.5)的解是存在唯一的。一般地，设 (8.2.5) 具有唯一解，且存在常数 $C>0$ 满足

$$\inf_{0\neq v\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\sup_{0\neq w\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\frac{|a(v,w)|}{\|v\|_{1,2,\Omega}\|w\|_{1,2,\Omega}}\geqslant C \tag{8.2.6}$$

求解问题(8.2.1)或(8.2.5)的有限元方法是求解下述问题：

$$u_h\in\mathring{W}_h^1,a(u_h,v_h)=f(v_h),\forall v_h\in\mathring{W}_h^1. \tag{8.2.7}$$

如果 $a_j=0$，$1\leqslant j\leqslant n$，$a_0\geqslant 0$，由(8.2.2)式和定理 7.1.5 可知 $\{\mathring{W}_h^1\}$ 是一致弱强制的，再由定理 7.1.1,7.1.2 和定理 8.1.3 可知，u_h 是收敛于 u_0 的。一般地，有下述定理。

定理 8.2.1 令 $\sigma=2$。设 H_1 和(8.2.6)式成立，则对 $\forall f\in L^2(\Omega)$，(8.2.7)当 h 足够小时有唯一解，且在 $L^{2,2}(\Omega)$ 意义下收敛于(8.2.5)的解 u_0。

证明 由定理 8.1.3 以及第七章的逼近性定理和弱闭性定理，只须证明 $\{\mathring{W}_h^1\}$ 是一致弱强制的。

事实上，存在与 h 无关的正常数 C 使得

$$\inf_{0\neq v_h\in\mathring{W}_h^1}\sup_{0\neq w_h\in\mathring{W}_h^1}\frac{|a(v_h,w_h)|}{\|v_h\|_{1,2,\Omega}\|w_h\|_{1,2,\Omega}}\geqslant C \tag{8.2.8}$$

对足够小的 h 一致成立。

假设(8.2.8)式不对，则 $\forall\tau\in\mathrm{N}$，存在 $h_\tau\in(0,1),v_\tau\in\mathring{W}_{h_\tau}^1$，使得 $h_\tau\to 0$ 且

$$1=\|v_\tau\|_{1,2,\Omega}>\tau\sup_{0\neq w\in\mathring{W}_{h_\tau}^1}\frac{|a(v_\tau,w)|}{\|w\|_{1,2,\Omega}},\ \tau\in\mathrm{N} \tag{8.2.9}$$

由定理 7.1.2，不妨令 v_τ 弱收敛于 $v_\infty \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$. 由定理 7.1.1，对 $\forall w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$，存在 $w_\tau \in \mathring{W}^1_{h_\tau}$ 使得 w_τ 收敛于 w. 若 $w \neq 0$，则从(8.2.9)式推出

$$0 = \lim_{\tau\to\infty} a(v_\tau, w_\tau) = \lim_{\tau\to\infty}(a(v_\tau, w) + a(v_\tau, w_\tau - w))$$
$$= a(v_\infty, w).$$

由 w 的任意性和(8.2.6)式可知，$v_\infty = 0$. 再由(8.2.9)式得

$$0 = \lim_{\tau\to\infty} a(v_\tau, v_\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij} v_\tau^{e_i} v_\tau^{e_j} dx\right.$$
$$\left. + \int_\Omega\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_\tau^{e_j} v_\tau^0 + a_0 v_\tau^0 v_\tau^0\right) dx\right\}, \tag{8.2.10}$$

由定理 7.1.4 得

$$\lim_{\tau\to\infty}\|v_\tau^0\|_{0,2,\Omega} = \lim_{\tau\to\infty}\|v_\tau^0 - v_\infty\|_{0,2,\Omega} = 0.$$

所以(8.2.10)右端的第二项收敛于 0. 故

$$\lim_{\tau\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij} v_\tau^{e_i} v_\tau^{e_j} dx = 0. \tag{8.2.11}$$

由(8.2.2)式得 $\lim\limits_{\tau\to\infty} |v_\tau|^2_{1,2,\Omega} = 0$.

再由广义 Poincarè-Friedrichs 不等式(7.1.17)得

$$\lim_{\tau\to\infty}\|v_\tau\|_{1,2,\Omega} \leqslant C \lim_{\tau\to\infty}|v_\tau|_{1,2,\Omega} = 0.$$

这与 $\|v_\tau\|_{1,2,\Omega} = 1$ 矛盾. 所以(8.2.8)式成立. 证毕.

定理 8.2.1 证明了(8.2.7)的解 u_h 的收敛性，即 u_h^β 分别在 $L^2(\Omega)$ 意义下收敛于 $D^\beta u_0$，$|\beta| \leqslant 1$. 下面将证明 $D^{e_i} u_h^0|_{\Omega_h}$ 也在 $L^2(\Omega_h)$ 意义下收敛于 $D^{e_i} u_0$，$i = 1, \cdots, n$.

定理 8.2.2 令 $\sigma = 2$，设 H_1 和(8.2.6)式成立，则有

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta u_h^0 - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega_h} = 0.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 使得

$$\|u_0 - \varphi\|_{1,2,\Omega} < \varepsilon. \tag{8.2.12}$$

由(7.1.9)式可以推得

$$\sum_{|\beta|=1} \|D^\beta u_h^0 - D^\beta(\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,2,\Omega_h}$$

$$= \sum_{|\beta|=1}\Big(\sum_{K\in K_h}\|D^\beta u_h^0 - D^\beta(\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,2,K}^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{K\in K_h}\sum_{|\beta|=1}\|u_h^\beta - (\Pi_h^1\varphi)^\beta\|_{0,2,K}^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C\sum_{|\beta|=1}\|u_h^\beta - (\Pi_h^1\varphi)^\beta\|_{0,2,\Omega}$$

$$\leqslant C\sum_{|\beta|=1}(\|u_h^\beta - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega} + \|D^\beta u_0 - D^\beta\varphi\|_{0,2,\Omega} + |\varphi - \Pi_h^1\varphi|_{1,2,\Omega}).$$

由(7.2.13)式和(8.2.12)得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\mu<h}\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta u_\mu^0 - D^\beta(\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,2,\Omega_h}\leqslant C\varepsilon. \qquad (8.2.13)$$

因为

$$r_1+1>s_1+\frac{n}{2},$$

由 Sobolev 嵌入定理和(7.2.7)式得

$$\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta\varphi - D^\beta\Pi_K^0\varphi\|_{0,2,K}\leqslant Ch^{r_1}|\varphi|_{r_1+1,2,K}.$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta\varphi - D^\beta(\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,2,\Omega_h}=0. \qquad (8.2.14)$$

由(8.2.12)—(8.2.14)式及下式

$$\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta u_h^0 - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega}\leqslant\sum_{|\beta|=1}\{\|D^\beta u_h^0 - D^\beta(\Pi_h^1\varphi)^0\|_{0,2,\Omega_h} + \|D^\beta\varphi - D^\beta(\Pi_h^1)^0\|_{0,2,\Omega_h} + \|D^\beta\varphi - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega}\},$$

推得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{\mu<h}\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta u_\mu^0 - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega_h}\leqslant C\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得到定理结论。证毕。

定理 8.2.3 令 $\sigma=2$。设 H_1 和(8.2.6)式为真。如果存在 $r_4\in N$ 使得 $\sum_K^1$ 通过 (r_4-1) 阶强 F-E 检验，则存在与 h,u_0 无关的常数 C，当 $u_0\in W^{r,2}(\Omega)$ 时，

$$\|u_0-u_h\|_{1,2,\Omega}\leqslant C\sum_{i=1}^{4}h^{r_i}\|u_0\|_{r_i+1,2,\Omega} \tag{8.2.15}$$

对足够小的 h 一致成立，其中 r_1,r_2,r_3 是逼近性条件中的整数，

$$r=\max_{1\leqslant i\leqslant 4}\{r_i+1\}.$$

证明 利用引理 7.1.1，引理 7.1.2 和引理 7.2.3 可推出

$$\inf_{v_h\in \mathring{W}_h^1}\|u_0-v_h\|_{1,2,\Omega}\leqslant\|u_0-\Pi_h^1u_0\|_{1,2,\Omega}$$

$$\leqslant C\sum_{i=1}^{3}h^{r_i}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega}. \tag{8.2.16}$$

设 $w_h\in\mathring{W}_h^1$，由(8.2.1)式得

$$a(u_0,w_h)-f(w_h)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega(\partial_j(a_{ij}\partial_iu_0)w_h^0+a_{ij}\partial_iu_0w_h^{ej})dx$$

由 $\mathring{W}_h^1$ 的构造可知，存在 $w\in C^1(\bar\Omega),D^\beta w|_{\partial\Omega}=0,|\beta|\leqslant 1$，使得 $w_h=\Pi_h^1w$，所以

$$\begin{aligned}
&a(u_0,w_h)-f(w_h)\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K\in K_h}\int_K[\partial_j(a_{ij}\partial_iu_0)\Pi_K^0w+a_{ij}\partial_iu_0\Pi_K^{ej}w]dx\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K\in K_h}\Big\{\int_K a_{ij}\partial_iu_0(\Pi_K^{ej}w-D^{ej}\Pi_K^0w)dx\\
&\quad-\int_{\partial K}a_{ij}\partial_iu_0(\Pi_{\partial K}w-\Pi_K^0w)N_jds\Big\}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K\in K_h}\int_{\partial K}a_{ij}\partial_iu_0\Pi_{\partial K}^EwN_jds\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{K\in K_h}\sum_{F\subset\partial K}\int_F a_{ij}\partial_iu_0\Pi_{\partial K}^FwN_jds.
\end{aligned} \tag{8.2.17}$$

利用(5.3.5)式和 $P_{r_3-1}(K)\subset N_K^{ej}$ 的事实得

$$\Big|\int_K a_{ij}\partial_iu_0\ (\Pi_K^{ej}w-D^{ej}\Pi_K^0w)dx$$

$$- \int_{\partial K} a_{ij}\partial_i u_0(\Pi_{\partial K} w - \Pi_K^0 w)N_j ds \Big|$$

$$= \inf_{p\in P_{r_3-1}(K)} \Big| \int_K (a_{ij}\partial_i u_0 - p)(\Pi_K^{e_j} w - D^{e_j}\Pi_K^0 w)ds$$

$$- \int_{\partial K}(a_{ij}\partial_i u_0 - p)(\Pi_{\partial K} w - \Pi_K^0 w)N_j ds \Big| ,$$

利用 Hölder 不等式，不等式(7.1.9)，(7.1.10)，(7.2.8)及(7.2.9)，可得

$$\Big| \int_K a_{ij}\partial_i u_0(\Pi_K^{e_j} w - D^{e_j}\Pi_K^0 w)dx$$

$$- \int_{\partial K} a_{ij}\partial_i u_0(\Pi_{\partial K} w - \Pi_K^0 w)N_j ds \Big|$$

$$\leqslant Ch^{r_3}|a_{ij}\partial_i u_0|_{r_3,2,K}|\Pi_h^1 w|_{1,2,K}. \tag{8.2.18}$$

利用 $\sum_K^1$ 通过 (r_4-1) 阶强 F-E 检验的事实和不等式(7.2.8)及(7.3.28)得

$$\Big| \int_{\partial K} a_{ij}\partial_i u_0 \Pi_{\partial K}^E w N_j ds \Big|$$

$$= \inf_{p\in P_{r_4-1}(K)} \Big| \int_{\partial K}(a_{ij}\partial_i u_0 - p)\Pi_{\partial K}^E w N_j ds \Big|$$

$$\leqslant Ch^{r_4}|a_{ij}\partial_i u_0|_{r_4,2,K}|\Pi_h^1 w|_{1,2,K}. \tag{8.2.19}$$

由引理 5.1.1，对任意 $F\subset\partial K_1$，存在唯一的 $K_2\in K_h$ 使得 F 是 K_1 和 K_2 的公共 $(n-1)$ 维表面(当 $F\subset\partial\Omega$ 时，可选择 $K_2\subset R^n-\Omega$，令 $a_{ij}\partial u_0|_{K_2}=0$，$\Pi_h^1 w|_{K_2}=0$)。利用引理 7.2.3 的证明方法可以证得

$$\inf_{p\in P_{r_4-1}(F)} \|\varphi - p\|_{0,2,F}$$

$$\leqslant Ch^{r_4-\frac{1}{2}}|\varphi|_{r_4,2,K}, \forall\varphi\in W^{r_4}(K_1). \tag{8.2.20}$$

利用引理 7.1.3 证明中的第 (ii) 步的方法可以证得

$$|\Pi_{\partial K_1}^F w - \Pi_{\partial K_2}^F w|_{0,2,F} \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|\Pi_h^1 w|_{1,2,K_1\cup K_2}. \tag{8.2.21}$$

由 $\sum_K^1$ 通过 (r_4-1) 阶强 F-E 检验的事实和不等式(8.2.20)和(8.2.21)可得

$$\Big| \int_F a_{ij}\partial_i u_0(\Pi_{\partial K_1}^F w - \Pi_{\partial K_2}^F w)N_j ds \Big|$$

$$= \inf_{p \in P_{r_4-1}(F)} \left| \int_F (a_{ij}\partial_i u_0 - p)(\Pi^F_{\partial K_1} w - \Pi^F_{\partial K_2} w) N_j ds \right|$$

$$\leqslant Ch^{r_4} |a_{ij}\partial_i u_0|_{r_4,2,K_1 \cup K_2} |\Pi^1_h w|_{1,2,K_1 \cup K_2}. \tag{8.2.22}$$

由(8.2.17)—(8.2.19)和(8.2.22)式可以推出

$$|a(u_0, w_h) - f(w_h)|$$

$$\leqslant C \sum_{i=3}^{4} h^{r_i} |a_{ij}\partial_i u_0|_{r_i,2,\Omega} |w_h|_{1,2,\Omega}. \tag{8.2.23}$$

由定理 8.1.2，不等式 (8.2.16)和 (8.2.23) 可以得到(8.2.15)式。证毕。

定理 8.2.4 令 $\sigma = 2$，设 H_1 和 (8.2.6) 式为真。如果存在 $r_4 \in \mathrm{N}$ 使得 $\sum^1_K$ 通过 $(r_4 - 1)$ 阶强 F-E 检验，则当 $u_0 \in W^{r,2}(\Omega)$ 时，

$$\sum_{|\beta|=1} \|D^\beta u_0 - D^\beta u^0_h\|_{0,2,\Omega_h}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{4} h^{r_i} \|u_0\|_{r_i+1,2,\Omega}. \tag{8.2.24}$$

对足够小的 h 一致成立。

证明　由(7.1.9)式可得

$$\sum_{|\beta|=1} \|D^\beta u^0_h - D^\beta (\Pi^1_h u_0)^0\|_{0,2,\Omega_h}$$

$$= \sum_{|\beta|=1} \Big(\sum_{K \in K_h} \|D^\beta u^0_h - D^\beta \Pi^0_K u_0\|^2_{0,2,K} \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C \Big(\sum_K \sum_{|\beta|=1} \|u^\beta_h - (\Pi^1_h u_0)^\beta\|^2_{0,2,K} \Big)^{1/2}$$

$$= C \sum_{|\beta|=1} \|u^\beta_h - (\Pi^1_h u_0)^\beta\|_{0,2,\Omega}$$

$$\leqslant C \sum_{|\beta|=1} (\|u^\beta_h - D^\beta u_0\|_{0,2,\Omega} + \|u_0 - \Pi^1_h u_0\|_{1,2,\Omega}).$$

由此可得

$$\sum_{|\beta|=1} \|D^\beta u_0 - D^\beta u^0_h\|_{0,2,\Omega_h} \leqslant C\{\|u_0 - u_h\|_{1,2,\Omega}$$

$$+\|u_0-\Pi_h^1 u_0\|_{1,2,\Omega}\}.$$

再由(8.2.15)式,(7.2 13)式可得(8.2.24)式。证毕。

由引理7.1.2可知 $\|u_0-\Pi_h^1 u_0\|_{0,2,\Omega}$ 的误差估计比 $\|u_0-\Pi_h^1 u_0\|_{1,2,\Omega}$ 高一个 h 的量级，那么 $\|u_0-u_h^0\|_{0,2,\Omega}$ 的误差估计是否可以提高一个 h 的量级? 下面用 Aubin-Nitsche 技巧来讨论. 为此假设

$$\inf_{0\neq v\in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\sup_{0\neq w\in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\frac{|a(w,v)|}{\|w\|_{1,2,\Omega}\|v\|_{1,2,\Omega}}>0. \qquad (8.2.25)$$

成立,且 $\forall g\in L^2(\Omega)$，方程

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i(a_{ij}\partial_j\varphi)-\sum_{j=1}^{n}\partial_j(a_j\varphi)+a_0\varphi=g, \text{在}\ \Omega\ \text{内}, \\ \varphi|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \qquad (8.2.26)$$

有唯一解 $\varphi\in W^{2,2}(\Omega)$，并且满足

$$\|\varphi\|_{2,2,\Omega}\leqslant C\|g\|_{0,2,\Omega}. \qquad (8.2.27)$$

当 Ω 是凸的,且 a_{ij},a_j,a_0 足够光滑时,(8.2.27)式成立。在上述假设下,可以得到下述定理。

定理 8.2.5 令 $\sigma=2$, $n\leqslant 3$. 设(8.2.6),(8.2.25)和(8.2.27)式成立。若 H_1 成立且 $s_1=0$，则当 $u_0\in W^{r,2}(\Omega)$ 时,有

$$\|u_0-u_h^0\|_{0,2,\Omega}\leqslant C\sum_{i=1}^{4}h^{r_i+1}\|u_0\|_{r_i+1,2,\Omega}. \qquad (8.2.28)$$

证明 $\forall g\in L^2(\Omega)$，记 $\varphi_g\in \mathring{W}^{1,2}(\Omega),\varphi_h\in \mathring{W}_h^1$ 分别是下述方程的解:

$$a(v,\varphi_g)=\int_\Omega gv\,dx, \forall v\in \mathring{W}^{1,2}(\Omega), \qquad (8.2.29)$$

$$a(v_h,\varphi_h)=\int_\Omega gv_h^0\,dx, \forall v_h\in \breve{W}_h^1. \qquad (8.2.30)$$

显然

$$\|u_0-u_h^0\|_{0,2,\Omega}=\sup_{g\in L^2(\Omega)}\frac{\left|\int_\Omega g(u_0-u_h^0)dx\right|}{\|g\|_{0,2,\Omega}}, \qquad (8.2.31)$$

$$\int_\Omega g(u_0-u_h^0)dx=a(u_0,\varphi_g)-a(u_h,\varphi_h)$$

$$= a(u_0 - u_h, \varphi_g - \varphi_h) + a(u_0 - u_h, \varphi_h)$$
$$+ a(u_h, \varphi_g - \varphi_h).$$

利用定理 8.2.3 得

$$\|\varphi_g - \varphi_h\|_{1,2,\Omega} \leqslant Ch\|\varphi_g\|_{2,2,\Omega}, \tag{8.2.32}$$

$$\left|\int_\Omega g(u_0 - u_h^0)dx\right|$$
$$\leqslant C\left\{\|\varphi_g\|_{2,2,\Omega}\sum_{i=1}^{4} h^{r_i+1}\|u_0\|_{r_i+1,2,\Omega}\right.$$
$$\left. + |a(u_0 - u_h, \varphi_h)| + |a(u_h, \varphi_g - \varphi_h)|\right\}. \tag{8.2.33}$$

注意

$$a(u_h, \varphi_h) = \int_\Omega g u_h^0 dx, \varphi_g$$

满足(8.2.26),所以

$$a(u_h, \varphi_g - \varphi_h) = \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}D^{e_i}\varphi_g u_h^{e_j} + D^{e_i}(a_{ij}D^{e_j}\varphi_g)u_h^0)\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n} (a_i\varphi_g u_h^{e_i} + \partial_i(a_i\varphi_g)u_h^0)\right\}dx. \tag{8.2.34}$$

令 $v \in C^1(\bar{\Omega})$ 使得 $u_h = \Pi_h^1 v$. 对 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, 估计

$$T_{0,i}(\varphi, u_h) = \int_\Omega (D^{e_i}\varphi u_h^0 + \varphi u_h^{e_i})dx.$$

类似于(7.3.6)式得

$$T_{0,i}(\varphi, u_h) = \sum_{K\in K_h}\int_K (D^{e_i}\varphi u_h^0 + \varphi u_h^{e_i})dx$$
$$= \sum_{K\in K_h}\int_K (D^{e_i}\varphi \Pi_K^0 v + \varphi \Pi_K^{e_i} v)dx$$
$$= \sum_{K\in K_h}\min_{p\in P_0(K)}\left\{\int_K (\varphi - p)(\Pi_K^{e_i} v - D^{e_i}\Pi_K^0 v)dx\right.$$
$$- \int_{\partial K}(\varphi - p)(\Pi_{\partial K} v - \Pi_K^0 v)N_i ds$$
$$\left. + \int_{\partial K}(\varphi - p)\Pi_{\partial K}^i v N_i ds\right\}$$

$$+\sum_{F=K_1\cap K_2}\min_{p\in P_0(K_1\cup K_2)}\int_F(\varphi-p)(\Pi^F_{\partial K_1}v$$

$$-\Pi^F_{\partial K_2}v)N_i ds\ ,$$

其中第二求和项表示对所有 $F\in\mathscr{F}_h$ 求和，当 $F\subset\partial\Omega$ 时，认为 $K_2\subset R^n-\Omega$. N 是 ∂K_1 的单位外法向量. 利用 Schwarz 不等式和引理 7.2.3，不等式(7.3.23)得

$$|T_{0,i}(\varphi,u_h)|$$

$$\leqslant Ch^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{K\in K_h}|\varphi|_{1,2,K}[\|\Pi^{e_i}_K v-D^{e_i}\Pi^0_K v\|_{0,2,K}h^{\frac{1}{2}}$$

$$+\|\Pi^E_{\partial K}v\|_{0,2,\partial K}+\|\Pi_{\partial K}v-\Pi^0_K v\|_{0,2,\partial K}]$$

$$+\sum_{F=K_1\cap K_2}|\varphi|_{1,2,K_1\cup K_2}\|\Pi^F_{\partial K_1}v-\Pi^F_{\partial K_2}v\|_{0,2,F}\Big\}.\quad(8.2.35)$$

由引理 7.1.1—引理 7.1.3，得

$$\|\Pi^{e_i}_K v-D^{e_i}\Pi^0_K v\|_{0,2,K}\leqslant\|\Pi^{e_i}_K(v-u_0)-D^{e_i}\Pi^0_K(v-u_0)\|_{0,2,K}$$

$$+\|D^{e_i}u_0-\Pi^{e_i}_K u_0\|_{0,2,K}+\|D^{e_i}u_0-D^{e_i}\Pi^0_K u_0\|_{0,2,K}$$

$$\leqslant C\{\|\Pi^{e_i}_K(v-u_0)\|_{0,2,K}+\|D^{e_i}u_0-\Pi^{e_i}_K u_0\|_{0,2,K}$$

$$+\|D^{e_i}u_0-D^{e_i}\Pi^0_K u_0\|_{0,2,K}\},$$

$$\|\Pi^{e_i}_K v-D^{e_i}\Pi^0_K v\|_{0,2,K}$$

$$\leqslant C\Big\{\|D^{e_i}u_0-u^{e_i}_h\|_{0,2,K}+\sum_{j=1}^{3}h^{r_j}\|u_0\|_{r_j+1,2,K}\Big\},$$

$$(8.2.36)$$

$$\|\Pi_{\partial K}v-\Pi^0_K v\|_{0,2,\partial K}\leqslant\|\Pi_{\partial K}(v-u_0)-\Pi^0_K(v-u_0)\|_{0,2,\partial K}$$

$$+\|u_0-\Pi_{\partial K}u_0\|_{0,2,\partial K}+\|u_0-\Pi^0_K u_0\|_{0,2,\partial K}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{|\beta|=1}\|\Pi^\beta_K(v-u_0)\|_{0,2,K}h^{\frac{1}{2}}+\|u_0-\Pi_{\partial K}u_0\|_{0,2,\partial K}$$

$$+\|u_0-\Pi^0_K u_0\|_{0,2,\partial K}\Big\},$$

$$\|\Pi_{\partial K}v-\Pi^0_K v\|_{0,2,\partial K}\leqslant C\Big\{h^{\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=1}\|D^\beta u_0-u^\beta_h\|_{0,2,K}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}h^{r_j+\frac{1}{2}}\|u_0\|_{r_j+1,2,K}\Big\}. \tag{8.2.37}$$

利用不等式(7.3.28)及

$$\Pi_{\partial K}^{E}u_0=\Pi_{\partial K}u_0-\Pi_{\partial K}^{F}u_0,$$

$$\|\Pi_{\partial K}^{E}v\|_{0,2,\partial K}\leqslant\|\Pi_{\partial K}^{E}(v-u_0)\|_{0,2,\partial K}+\|\Pi_{\partial K}^{E}u_0\|_{0,2,\partial K}$$
$$\leqslant C\Big\{h^{\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=1}\|\Pi_K^{\beta}(v-u_0)\|_{0,2,K}$$
$$+\|u_0-\Pi_{\partial K}u_0\|_{0,2,\partial K}+\|u_0-\Pi_{\partial K}^{F}u_0\|_{0,2,\partial K}\Big\}$$
$$\leqslant C\Big\{h^{\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=1}\|D^{\beta}u_0-u_h^{\beta}\|_{0,2,K}$$
$$+\sum_{j=1}^{3}h^{r_j+\frac{1}{2}}\|u_0\|_{r_j+1,2,K}\Big\}. \tag{8.2.38}$$

类似地，

$$\|\Pi_{\partial K_1}^{F}v-\Pi_{\partial K_2}^{F}v\|_{0,2,F}\leqslant\|\Pi_{\partial K_1}^{F}(v-u_0)-\Pi_{\partial K_2}^{F}(v-u_0)\|_{0,2,F}$$
$$+\|u_0-\Pi_{\partial K_1}^{F}u_0\|_{0,2,F}+\|u_0-\Pi_{\partial K_2}^{F}u_0\|_{0,2,F}$$
$$\leqslant C\Big\{h^{\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=1}\{\|\Pi_{K_1}^{\beta}(v-u_0)\|_{0,2,K_1}+\|\Pi_{K_2}^{\beta}(v-u_0)\|_{0,2,K_2}]$$
$$+\|u_0-\Pi_{\partial K_1}^{F}u_0\|_{0,2,F}+\|u_0-\Pi_{\partial K_2}^{F}u_0\|_{0,2,F}\Big\}$$
$$\leqslant C\Big\{h^{\frac{1}{2}}\sum_{|\beta|=1}\|D^{\beta}u_0-u_h^{\beta}\|_{0,2,K_1\cup K_2}$$
$$+\sum_{j=1}^{3}h^{r_j+\frac{1}{2}}\|u_0\|_{r_j+1,2,K_1\cup K_2}\Big\}. \tag{8.2.39}$$

综合(8.2.35)—(8.2.39)式和(8.2.15)式得

$$|T_{0,i}(\varphi,u_h)|\leqslant C|\varphi|_{1,2,\Omega}\sum_{j=1}^{3}h^{r_j+1}\|u\|_{r_j+1,2,\Omega}. \tag{8.2.40}$$

由(8.2.34)和(8.2.40)式得

$$|a(u_h,\varphi_g-\varphi_h)|=\Big|\sum_{i,j=1}^{n}T_{0,i}(a_{ij}D^{e_j}\varphi_g,u_h)$$

$$+\sum_{j=1}^{*} T_{0,j}(a_j\varphi_g, u_h)\Big|$$

$$\leqslant C\|\varphi_g\|_{2,2,\Omega}\sum_{j=1}^{3} h^{r_j+1}\|u\|_{r_j+1,2,\Omega}. \tag{8.2.41}$$

类似地可证

$$|a(u_0-u_h,\varphi_h)|\leqslant C\|\varphi_g\|_{2,2,\Omega}\sum_{j=3}^{4} h^{r_j+1}\|u_0\|_{r_j+1,2,\Omega}. \tag{8.2.42}$$

综合(8.2.33),(8.2.41),(8.2.42)和(8.2.27)式可得

$$\left|\int_\Omega g(u_0-u_h^0)dx\right|\leqslant C\|\varphi_g\|_{2,2,\Omega}\sum_{j=1}^{4} h^{r_j+1}\|u_0\|_{r_j+1,2,\Omega}$$

$$\leqslant C\|g\|_{0,2,\Omega}\sum_{j=1}^{4} h^{r_j+1}\|u_0\|_{r_j+1,2,\Omega}. \tag{8.2.43}$$

再由(8.2.31)式便得到了(8.2.28)式．证毕．

§8.3 薄板弯曲问题的有限元方法

令 Ω 是 R^2 中的多边形域．考虑周边固定的薄板弯曲问题，这一问题如下描述：

$$\begin{cases}\Delta^2 u=f, & \text{在}\ \Omega\ \text{内},\\ u|_{\partial\Omega}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{8.3.1}$$

其中 $f\in L^2(\Omega)$，$\Delta=D^{2e_1}+D^{2e_2}$ 是 Laplace 算子．

$\forall v,w\in L^{2,2}(\Omega)$，定义

$$a(v,w)=\int_\Omega(v^{(2,0)}w^{(2,0)}+2v^{(1,1)}w^{(1,1)}+v^{(0,2)}w^{(0,2)})dx, \tag{8.3.2}$$

$$f(v)=\int_\Omega fv^0dx. \tag{8.3.3}$$

问题(8.3.1)的弱形式是

$$u_0\in \mathring{W}^{2,2}(\Omega),\ a(u_0,v)=f(v),\ \forall v\in\mathring{W}^{2,2}(\Omega). \tag{8.3.4}$$

问题(8.3.4)的有限元方法是求解下述问题:

$$u_h\in \mathring{W}_h^2, a(u_h,v_h)=f(v_h), \forall v_h\in \mathring{W}_h^2. \tag{8.3.5}$$

对于(8.3.5)的解 u_h 的收敛性有下述定理.

定理 8.3.1 令 $\sigma=2$, 设 H_2 成立. 则 $\forall f\in L^2(\Omega)$,(8.3.5)在 h 足够小时有唯一解 u_h, 且在 $L^{2,2}(\Omega)$ 意义下 u_h 收敛于问题(8.3.4)的解 u_0.

利用不等式(7.1.17),定理 7.1.1, 定理 7.1.2 和定理 8.1.3 可以证得本定理. 具体证明由读者自己给出.利用与定理 8.2.2 的证明类似的方法可得下述定理.

定理 8.3.2 令 $\sigma=2$, 设 H_2 成立. 则有

$$\lim_{h\to 0}\sum_{|\beta|\leqslant 2}\|D^\beta u_0-D^\beta u_h^0\|_{0,2,\Omega_h}=0.$$

关于有限元解 u_h 的误差估计有下述定理.

定理 8.3.3 令 $\sigma=2$, 设 H_2 成立, 且存在 $r_6\geqslant 2$ 使得 Σ_K^2 通过(r_6-2)阶强 F-E 检验. 如果当 $K_1,K_2\in\mathscr{K}, F=K_1\cap K_2$ 是公共边时, $\forall w\in C^2(K_1\cup K_2), \forall p\in P_{r_6-3}(F)$, 有

$$\int_F p(\Pi_{\partial K_1}w-\Pi_{\partial K_2}w)ds=0. \tag{8.3.6}$$

成立,则存在与 h,u_0 无关的常数 C 使得,当问题(8.3.4)的解 $u_0\in W^{r,2}(\Omega)$ 时,下述估计

$$\|u_0-u_h\|_{2,2,\Omega}\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{6}h^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega}+h^{r_6-1}|u_0|_{\bar r,2,\Omega}\right), \tag{8.3.7}$$

$$\sum_{|\beta|\leqslant 2}\|D^\beta u_0-D^\beta u_h^0\|_{0,2,\Omega_h}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{5}h^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega}+h^{r_6-1}\|u_0\|_{r,2,\Omega}\right) \tag{8.3.8}$$

对足够小的 h 一致成立,其中

$$r=\max_{1\leqslant i\leqslant 6}\{r_i+1,4\}, \bar r=\max\{r_6+1,4\}, P_{-1}(F)=\{0\}.$$

如果进一步 $\forall K\in K_h, \forall w\in C^2(K)$, $\Pi_{\partial K}w=\Pi_K^0 w|_{\partial K}$, $D^{c_i}\Pi_K^0 w\in N_K^{c_i}, i=1,2$, 且 $\forall w_h\in \mathring{W}_h^2, w_h^0\in C_0(\bar\Omega)$, 则

$$r = \max_{1 \leqslant i \leqslant 6} (r_i + 1), \bar{r} = r_6 + 1.$$

证明 由 $\sum_K^2$ 的逼近性条件，引理 7.1.1，引理 7.1.2 和引理 7.2.3 得

$$\inf_{v_h \in \mathring{W}_h^2} \|u_0 - v_h\|_{2,2,\Omega} \leqslant \|u_0 - \Pi_h^2 u_0\|_{2,2,\Omega}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{5} h^{r_i - 1} |u_0|_{r_i+1,2,\Omega}. \tag{8.3.9}$$

$\forall w_h \in \mathring{W}_h^2$，记 $w \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足

$$w_h = \Pi_h^2 w, D^\beta w|_{\partial\Omega} = 0, |\beta| \leqslant 2.$$

注意 u_0 满足(8.3.1)，所以

$$\begin{aligned} a(u_0, w_h) - f(w_h) = \int_\Omega [& (D^{(2,0)} u_0 w_h^{(2,0)} - D^{(4,0)} u_0 w_h^0) \\ & + 2(D^{(1,1)} u_0 w_h^{(1,1)} - D^{(2,2)} u_0 w_h^0) \\ & + (D^{(0,2)} u_0 w_h^{(0,2)} - D^{(0,4)} u_0 w_h^0)] dx. \end{aligned} \tag{8.3.10}$$

现在考虑 $a(u_0, w_h) - f(w_h)$ 的估计，对于(8.3.10)式右端积分中的第二个括号有

$$\begin{aligned} & 2\int_\Omega (D^{(1,1)} u_0 w_h^{(1,1)} - D^{(2,2)} u_0 w_h^0) dx \\ & = \int_\Omega (2D^{(1,1)} u_0 w_h^{(1,1)} + D^{(2,1)} u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(1,2)} u_0 w_h^{(1,0)}) dx \\ & \quad - \int_\Omega (D^{(2,1)} u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(2,2)} u_0 w_h^0) dx \\ & \quad - \int_\Omega (D^{(1,2)} u_0 w_h^{(1,0)} + D^{(2,2)} u_0 w_h^0) dx. \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

现在对(8.3.11)式右端进行估计，首先

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (2D^{(1,1)} u_0 w_h^{(1,1)} + D^{(2,1)} u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(1,2)} u_0 w_h^{(1,0)}) dx \\ & = \sum_{K \in K_h} \Big\{ \int_K D^{(1,1)} u_0 [2\Pi_K^{(1,1)} w - D^{e_1} \Pi_K^{e_2} w - D^{e_2} \Pi_K^{e_1} w] dx \\ & \quad - \int_{\partial K} D^{(1,1)} u_0 [(\Pi_{\partial K}^N w N_1 - \Pi_{\partial K}^s w N_2 - \Pi_K^{e_2} w) N_2 \\ & \quad + (\Pi_{\partial K}^N w N_2 + \Pi_{\partial K}^s w N_1 - \Pi_K^{e_1} w) N_1] ds \Big\} \end{aligned}$$

$$+\sum_{K\in K_h}\sum_{F\subset\partial K}\int_F (2\Pi_{\partial K}^{NF} w N_1 N_2 + (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^{SF} w) D^{(1,1)} u_0 ds$$

$$+\sum_{K\in K_h}\int_{\partial K} (2\Pi_{\partial K}^{NE} w N_1 N_2 + (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^{SE} w) D^{(1,1)} u_0 ds. \tag{8.3.12}$$

利用(5.4.1)式,注意 $P_{r_5-2}(K)\subset N_K^{(1,1)}$, 得

$$R_K^1 = \left|\int_K D^{(1,1)}u_0[2\Pi_K^{(1,1)}w - D^{e_1}\Pi_K^{e_2}w - D^{e_2}\Pi_K^{e_1}w]dx\right.$$

$$-\int_{\partial K} D^{(1,1)}u_0[(\Pi_{\partial K}^N w N_1 - \Pi_{\partial K}^s w N_2 - \Pi_K^{e_2} w)N_2$$

$$\left.+(\Pi_{\partial K}^N w N_2 + \Pi_{\partial K}^N w N_1 - \Pi_K^{e_1} w)N_1]ds\right|$$

$$= \inf_{p\in P_{r_5-2}(K)}\left|\int_K (D^{(1,1)}u_0 - p)(2\Pi_K^{(1,1)}w - D^{e_1}\Pi_K^{e_2}w\right.$$

$$- D^{e_2}\Pi_K^{e_1}w)dx - \int_{\partial K}(D^{(1,1)}u_0 - p)[(\Pi_{\partial K}^N w N_1$$

$$- \Pi_{\partial K}^s w N_2 - \Pi_K^{e_2} w)N_2 + (\Pi_{\partial K}^N w N_2$$

$$\left.+ \Pi_{\partial K}^N w N_1 - \Pi_K^{e_1} w)N_1]ds\right|.$$

利用 Hölder 不等式,不等式(7.1.12),(7.2.7),(7.2.8)及(7.3.13)可得

$$R_K^1 \leqslant C h^{r_5-1}|u_0|_{r_5+1,2,K}|\Pi_h^2 w|_{2,2,K}. \tag{8.3.13}$$

因为 Σ_K^2 通过 (r_6-2) 阶强 F-E 检验,所以有

$$R_K^2 = \left|\int_{\partial K} D^{(1,1)}u_0(2N_1N_2\Pi_{\partial K}^{NE}w + (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^{SE}w)ds\right|$$

$$= \inf_{p\in P_{r_6-2}(K)}\left|\int_{\partial K}(D^{(1,1)}u_0 - p)(2N_1N_2\Pi_{\partial K}^{NE}w\right.$$

$$\left.+ (N_1^2 - N_2^2)\Pi_{\partial K}^{SE}w)ds\right|.$$

利用 Hölder 不等式,不等式(7.3.29)和(7.2.8)得

$$R_K^2 \leqslant C h^{r_6-1}|u_0|_{r_6+1,2,K}|\Pi_h^2 w|_{2,2,K}. \tag{8.3.14}$$

对于 $F\in\mathscr{F}_h$, 记 $K_1, K_2\in K_h, F = K_1\cap K_2$ (如果 $F\subset\partial\Omega$, 令 $K_2\subset R^n-\Omega$)。由于 Σ_K^2 通过 (r_6-2) 阶强 F-E 检验因此有

$$R_F = \left|\int_F D^{(1,1)}u_0(2N_1N_2(\Pi_{\partial K_1}^{NF}w + \Pi_{\partial K_2}^{NF}w) + (N_1^2 - N_2^2)(\Pi_{\partial K_1}^{sF}w + \Pi_{\partial K_2}^{sF}w))ds\right|$$

$$= \inf_{p\in P_{r_6-1}(F)}\left|\int_F (D^{(1,1)}u_0 - p)[2N_1N_2(\Pi_{\partial K_1}^{NF}w + \Pi_{\partial K_2}^{NF}w) + (N_1^2 - N_2^2)(\Pi_{\partial K_1}^{sF}w + \Pi_{\partial K_2}^{sF}w)]ds\right|.$$

利用引理 7.1.3 的证明方法可证

$$\|\Pi_{\partial K_1}^{NF}w + \Pi_{\partial K_2}^{NF}w\|_{0,2,F} + \|\Pi_{\partial K_1}^{sF}w + \Pi_{\partial K_2}^{sF}w\|_{0,2,F} \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}|\Pi_h^2 w|_{2,2,K_1\cup K_2}. \quad (8.3.15)$$

利用 Hölder 不等式，上式和不等式(8.2.20) ($r_4 = r_6 - 1$) 得

$$R_F \leqslant Ch^{r_6-1}|u_0|_{r_6+1,2,K_1\cup K_2}|\Pi_h^2 w|_{2,2,K_1\cup K_2}. \quad (8.3.16)$$

利用 Hölder 不等式，(8.3.12)—(8.3.14)及(8.3.16)式得

$$\left|\int_\Omega (2D^{(1,1)}u_0 w_h^{(1,1)} + D^{(2,1)}u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(1,2)}u_0 w_h^{(1,0)})dx\right| \leqslant \sum_{i=5}^{6} h^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega}|w_h|_{2,2,\Omega}. \quad (8.3.17)$$

其次，对(8.3.11)右端的后两项有

$$\int_\Omega [(D^{(2,1)}u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(2,2)}u_0 w_h^0) + (D^{(1,2)}u_0 w_h^{(1,0)} + D^{(2,2)}u_0 w_h^0)]dx$$

$$= \sum_{K\in K_h}\int_K [(D^{(2,1)}u_0\Pi_K^{e_2}w + D^{(2,2)}u_0\Pi_K^0 w) + (D^{(1,2)}u_0\Pi_K^{e_1}w + D^{(2,2)}u_0\Pi_K^0 w)]dx$$

$$= \sum_{K\in K_h}\left\{\int_K [D^{(2,1)}u_0(\Pi_K^{e_2}w - D^{e_2}\Pi_K^0 w) + D^{(1,2)}u_0(\Pi_K^{e_1}w - D^{e_1}\Pi_K^0 w)]dx - \int_{\partial K}[D^{(2,1)}u_0(\Pi_{\partial K}w - \Pi_K^0 w)N_2 + D^{(1,2)}u_0(\Pi_{\partial K}w - \Pi_K^0 w)N_1]ds\right\}$$

$$+ \sum_{K\in K_h}\int_{\partial K}(D^{(2,1)}u_0 N_2 + D^{(1,2)}u_0 N_1)\Pi_{\partial K}w\,ds, \quad (8.3.18)$$

注意 $P_{r_5-1}(K)\subset N_K^{c_i}$，并且利用(5.4.1)式，不等式(7.2.7),(7.2.8)及(7.1.13)和(7.1.14)得

$$\Big|\sum_{K\in K_h}\Big\{\int_K (D^{(2,1)}u_0(\Pi_K^{c_2}w - D^{c_2}\Pi_K^0 w) + D^{(1,2)}u_0(\Pi_K^{c_1}w$$

$$- D^{c_2}\Pi_K^0 w)]dx - \int_{\partial K}[D^{(2,1)}u_0(\Pi_{\partial K}w - \Pi_K^0 w)N_2$$

$$+ D^{(1,2)}u_0(\Pi_{\partial K}w - \Pi_K^0 w)N_1]ds\Big\}\Big|$$

$$\leqslant Ch^{r_5-1}|u_0|_{r_5+1,2,\Omega}|w_h|_{2,2,\Omega}. \tag{8.3.19}$$

利用不等式(7.2.8)(或(7.3.10)),(7.1.15))得

$$\Big|\sum_{K\in K_h}\int_{\partial K}(D^{(2,1)}u_0 N_2 + D^{(1,2)}u_0 N_1)\Pi_{\partial K}w\,ds\Big|$$

$$\leqslant Ch^{r_6-1}\|u_0\|_{r,2,\Omega}|w_h|_{2,2\Omega}. \tag{8.3.20}$$

综合(8.3.11),(8.3.17)—(8.3.20)式得

$$\Big|2\int_\Omega (D^{(1,1)}u_0 w_h^{(1,1)} - D^{(2,2)}u_0 w_h^0)dx\Big|$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{i=5}^{6}h^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega} + h^{r_6-1}\|u_0\|_{r,2,\Omega}\Big). \tag{8.3.21}$$

对(8.3.10)式右端的另外两项也可以得到类似的估计,所以

$$|a(u_0,w_h) - f(w_h)|$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{i=5}^{6}h^{r_i-1}|u_0|_{r_i+1,2,\Omega} + h^{r_6-1}\|u_0\|_{r,2,\Omega}\Big). \tag{8.3.22}$$

利用不等式(8.3.9),(8.3.22)和定理 8.1.2，定理 8.3.1 及定理 7.1.5 可得(8.3.7)式.

如果 $\forall K\in K_h,\forall w\in C^2(K)$, $\Pi_{\partial K}w = \Pi_K^0 w|_{\partial K}, D^{c_i}\Pi_K^0 w\in N_K^{c_i}$, $(i=1,2)$，且 $\forall w_h\in \mathring{W}_h^2, w_h^0\in C_0(\bar\Omega)$,则 $w_h^{c_i} = D^{c_i}w_h^0 (i=1,2)$. 这时，$a(u_0,w_h) - f(w_h)$ 可写成

$$a(u_0,w_h) - f(w_h) = \int_\Omega[(D^{(2,0)}u_0 w_h^{(2,0)} + D^{(3,0)}u_0 w_h^{(1,0)})$$

$$+ (2D^{(1,1)}u_0 w_h^{(1,1)} + D^{(2,1)}u_0 w_h^{(0,1)} + D^{(1,2)}u_0 w_h^{(1,0)})$$

$$+ (D^{(0,2)}u_0 w_h^{(0,2)} + D^{(0,3)}u_0 w_h^{(0,1)})]dx$$

$$- \int_{\Omega} (D^{(2,1)} u_0 w^{(0,1)} + D^{(1,2)} u_0 w_h^{(1,0)}$$

$$+ D^{(3,0)} u_0 w_h^{(1,0)} + D^{(0,3)} u_0 w_h^{(0,1)} + \Delta^2 u_0 w_h^0) dx. \qquad (8.3.23)$$

由于 $w_h^0 \in C_0(\bar{\Omega}), w_h^{e_i} = D^{e_i} w_h^0 (i = 1, 2)$，所以(8.3.23)式的第二项积分项可以推断为 0。第一个积分项可用 (8.3.17) 式的证明方法得到与(8.3.17)式类似的估计，所以

$$|a(u_0, w_h) - f(w_h)|$$

$$\leqslant C \sum_{i=5}^{6} h^{r_i - 1} |u_0|_{r_i+1,2,\Omega} |w_h|_{2,2,\Omega}. \qquad (8.3.24)$$

这样就得了

$$r = \max_{1 \leqslant i \leqslant 6} (r_i + 1), \bar{r} = r_6 + 1$$

情形的(8.3.7)式。

不等式(8.3.8)用不等式(8.2.24)的证明方法得到。证毕。

根据上面的定理和第六章的讨论，表 8.3.1 列出了第五章给出的具体单元关于 h 的误差估计及 u_0 的正则性要求。

表 8.3.1

单　　元	误差 $\|u_0 - u_h\|_{2,2,\Omega}$	正则性要求
TQC6 元	$O(h)$	$u_0 \in W^{4,2}(\Omega)$
TQC9 元	$O(h)$	$u_0 \in W^{3,2}(\Omega)$
TQC12 元	$O(h^2)$	$u_0 \in W^{4,2}(\Omega)$
TQC15 元	$O(h^2)$	$u_0 \in W^{4,2}(\Omega)$
Bell 元	$O(h^3)$	$u_0 \in W^{6,2}(\Omega)$
Argyris 元	$O(h^4)$	$u_0 \in W^{6,2}(\Omega)$
RQC8 元	$O(h)$	$u_0 \in W^{4,2}(\Omega)$
Adini 元	$O(h)$	$u_0 \in W^{3,2}(\Omega)$
RQC12 元	$O(h)$	$u_0 \in W^{3,2}(\Omega)$
B-F-S 元	$O(h^2)$	$u_0 \in W^{4,2}(\Omega)$

在一般情形下，即使 Ω 是凸的多边形域，$\|u_h^0 - u_0\|_{0,2,\Omega}$ 的估计也不能比 $\|u_0 - u_h\|_{2,2,\Omega}$ 高一阶 h 的量级，因为对任意 $f \in L^2(\Omega)$，(8.3.1) 的解 u 不属于 $w^{4,2}(\Omega)$。在 Ω 是凸时，$\forall f \in L^2(\Omega)$，

(8.3.1) 的解 $u \in W^{3,2}(\Omega)$，且 $\|u\|_{3,2,\Omega} \leqslant C\|f\|_{0,2,\Omega}$. 所以利用 Aubin-Nitsche 技巧可以证明，对 TQC 9 元，Adini 元，RQC 12 元等，

$$\sum_{|\beta|\leqslant 1} \|D^\beta u_0 - u_h^\beta\|_{0,2,\Omega}$$

是 $O(h^2)$ 量级. 对 TQC 6 元也有相同的结论[17].

另外，由紧致性定理，可以得到有限元解的 L^∞ 收敛性.

定理 8.3.4 令 $\sigma = 2$，设 H_2 成立. 则有

$$\lim_{h\to 0}\|u_0 - u_h^0\|_{0,\infty,\Omega} = 0.$$

证明 由定理 7.1.3 得

$$\begin{aligned}
\|u_0 - u_h^0\|_{0,\infty,\Omega} &\leqslant \inf_{v_h\in \mathring{W}_h^2} (\|u_0 - v_h^0\|_{0,\infty,\Omega} + \|v_h^0 - u_h^0\|_{0,\infty,\Omega}) \\
&\leqslant C \inf_{v_h\in \mathring{W}_h^2} (\|u_0 - v_h^0\|_{0,\infty,\Omega} + \|v_h - u_h\|_{2,2,\Omega}) \\
&\leqslant C \inf_{v_h\in \mathring{W}_h^2} (\|u_0 - v_h^0\|_{0,\infty,\Omega} + \|u_0 - v_h\|_{2,2,\Omega} \\
&\quad + \|u_0 - u_h\|_{2,2,\Omega}),
\end{aligned}$$

定理 7.1.1 和定理 8.3.1 给出定理的结论. 证毕.

§8.4 定常 Stokes 方程的有限元方法

定常 Stokes 问题有几种描述形式，如本原方程，流函数方程等. 在二维情形 ($n = 2$)，引进流函数可以将定常 Stokes 问题化为问题(8.3.1)的形式，所以第三节的讨论适合于这一情形. 本节将讨论解本原方程的有限元方法.

设 Ω 是 R^n 中的有界区域，$f \in (L^2(\Omega))^n$. 定常 Stokes 方程的齐次 Dirichlet 边值问题是：求 $u = (u_1, \cdots, u_n)^T, p$ 满足

$$\begin{cases}
-\nu\Delta u + \nabla p = f, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \\
\nabla \cdot u = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内}, \\
u|_{\partial\Omega} = 0,
\end{cases} \tag{8.4.1}$$

其中

$$\nabla=(\partial_1,\cdots,\partial_n)^T,\ \nabla\cdot u=\sum_{i=1}^{n}\partial_i u_i,$$

ν是正常数，称为粘性常数。u称为流体的速度，p是流体的压力。

定义 $L^2(\Omega)$ 的闭子空间

$$L_0^2(\Omega)=\{q\,|\,q\in L^2(\Omega),\int_\Omega q dx=0\}.$$

$\forall v,w\in(L^{1,2}(\Omega))^n,\forall q\in L^2(\Omega)$，定义

$$\|v\|_{1,\sigma,\Omega}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|_{1,\sigma,\Omega}^{\sigma}\right)^{1/\sigma},$$

令

$$a(v,w)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i^{e_j}w_i^{e_j}dx, \tag{8.4.2}$$

$$\nabla\cdot v=\sum_{i=1}^{n}v_i^{e_i}, \tag{8.4.3}$$

$$f(v)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f_i v_i^0 dx, \tag{8.4.4}$$

$$b(v,q)=\int_\Omega\nabla\cdot v q dx. \tag{8.4.5}$$

问题(8.4.1)的弱形式是

$$\begin{cases}(u,p)\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n\times L_0^2(\Omega),\\ \nu a(u,v)-b(v,\varphi)=f(v),\forall v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n,\\ b(u,q)=0,\ \forall q\in L_0^2(\Omega).\end{cases} \tag{8.4.6}$$

关于问题(8.4.6)的解的存在唯一性，有下述定理。

定理 8.4.1 设Ω是凸的并具有 Lipschitz 连续的边界，则存在正常数 ξ_1,ξ_2 使得

$$a(v,v)\geqslant\xi_1\|v\|_{1,2,\Omega}^2,\ \forall v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n, \tag{8.4.7}$$

$$\sup_{0\neq v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n}\frac{|b(v,q)|}{\|v\|_{1,2,\Omega}}\geqslant\xi_2\|q\|,\ \forall q\in L_0^2(\Omega) \tag{8.4.8}$$

成立。从而问题 $\forall f\in(L^2(\Omega))^n$ 都有唯一解。

不等式(8.4.7)就是 Poincare-Friedrichs 不等式,(8.4.8)的证明参见[52,64,65]. 在这一不等式成立时, Brezzi 理论说明问题(8.4.6) $\forall f \in (L^2(\Omega))^*$ 都有唯一解.

接下来讨论问题(8.4.6)的有限元方法. 设Ω是多胞形域. 记 $V_h = (\mathring{W}_h^1)^n$, 取 M_h 是 $L_0^2(\Omega)$ 中的有限维子空间, 例如分片多项式构成的空间. 则问题(8.4.6)的有限元方法是

$$\begin{cases}(u_h, p_h) \in V_h \times M_h, \\ \nu a(u_h, v_h) - b(v_h, p_h) = f(v_h), \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0, \ \forall q_h \in M_h.\end{cases} \tag{8.4.9}$$

由 Brezzi 理论和定理 7.1.5 得知, H_1 成立时, 问题(8.4.9)唯一可解的充分条件是

$$\alpha_h = \inf_{0 \neq q_h \in M_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{|b(v_h, q_h)|}{\|q_h\|_{0,2,\Omega} \|v_h\|_{1,2,\Omega}} > 0. \tag{8.4.10}$$

在上式成立时, 我们来讨论(8.4.9)解的收敛性和误差估计. 首先证明一个引理.

引理 8.4.1 设 (8.4.10) 式成立, 则存在线性投影算子 P_h: $(L^{1,2}(\Omega))^n \to V_h$, 使得下述关系式成立:

$$P_h v_h = v_h, \forall v_h \in V_h, \tag{8.4.11}$$

$$\|P_h v\|_{1,2,\Omega} \leqslant C(1 + \alpha_h^{-1})\|v\|_{1,2,\Omega}, \forall v \in (L^{1,2}(\Omega))^n, \tag{8.4.12}$$

$$\|v - P_h v\|_{1,2,\Omega} \leqslant C(1 + \alpha_h^{-1}) \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{1,2,\Omega}, \quad \forall v \in (L^{1,2}(\Omega))^n, \tag{8.4.13}$$

$$b(v, q) = b(P_h v, q), \forall v \in (L^{1,2}(\Omega))^n, q \in M_h. \tag{8.4.14}$$

证明 记 $\Lambda_h: (L^{1,2}(\Omega))^n \to V_h$, $\tilde{\Lambda}_h: L^2(\Omega) \to M_h$ 是正交投影算子, $\nabla^*: L_0^2(\Omega) \to (L^{1,2}(\Omega))^n$ 是满足下式的算子:

$$\forall (v, q) \in (L^{1,2}(\Omega))^n \times L_0^2(\Omega), \quad (\nabla^* q, v)_{1,\Omega} = b(v, q), \tag{8.4.15}$$

其中 $(\cdot,\cdot)_{1,2}$ 是 $(L^{1,2}(\Omega))^n$ 的内积. 由(8.4.10)式得

$$\|\Lambda_h \nabla^* q\|_{1,2,\Omega} \geqslant \alpha_h \|q\|_{0,2,\Omega}, \forall q \in M_h, \tag{8.4.16}$$

所以 $\Lambda_h \nabla^*: M_h \to \Lambda_h \nabla^* M_h$ 可逆. 记其逆为 E_h, E_h 的伴随

算子为 E_h^*，即 $E_h: \Lambda_h\nabla^* M_h \to M_h, E_h^*: M_h \to \Lambda_h\nabla^* M_h$ 满足

$$\begin{cases} E_h\Lambda_h\nabla^* q = q, \forall q \in M_h, \\ \int_\Omega E_h v_h q_h dx = (v_h, E_h^* q_h)_{1,\Omega}, \forall (v_h, q_h) \in \Lambda_h\nabla^* M_h \times M_h. \end{cases} \tag{8.4.17}$$

由(8.4.16)式得

$$\sup_{0\neq q\in M_h} \frac{\|E_h^* q\|_{1,2,\Omega}}{\|q\|_{0,2,\Omega}} = \sup_{0\neq v\in\Lambda_h\nabla^* M_h} \frac{\|E_h v\|_{0,2,\Omega}}{\|v\|_{1,2,\Omega}} \leqslant \alpha_h^{-1}. \tag{8.4.18}$$

$\forall v \in (L^{1,2}(\Omega))^n$，令

$$P_h v = E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v + \Lambda_h v - E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot \Lambda_h v. \tag{8.4.19}$$

由(8.4.15)—(8.4.19)式不难验证 P_h 满足(8.4.11)—(8.4.13)式. 最后验证(8.1.14)式，设 $v \in (L^{1,2}(\Omega))^n, q \in M_h$，则

$$\begin{aligned} b(P_h v, q) &= (\nabla^* q, P_h v)_{1,\Omega} = (\nabla^* q, E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v)_{1,\Omega} \\ &\quad + (\nabla^* q, \Lambda_h v)_{1,\Omega} - (\nabla^* q, E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot \Lambda_h v)_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{8.4.20}$$

注意 $E_h^* \tilde{\Lambda}_h \cdot \nabla v \in V_h$，所以由(8.4.17)给出

$$\begin{aligned} (\nabla^* q, E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v)_{1,\Omega} &= (\Lambda_h \nabla^* q, E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v)_{1,2} \\ &= \int_\Omega (E_h \Delta_h \nabla^* q)(\tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v) dx \\ &= \int_\Omega q(\tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot v) dx = \int_\Omega q \nabla \cdot v dx = b(v, q), \end{aligned}$$

$$(\nabla^* q, E_h^* \tilde{\Lambda}_h \nabla \cdot \Lambda_h v)_{1,\Omega} = b(\Lambda_h v, q) = (\nabla^* q, \Lambda_h v)_{1,\Omega}.$$

因此 $b(v,q) = b(P_h v, q)$. 证毕.

记 $\mathring{V}_h = \{v \mid v \in V_h, b(v,q) = 0, \forall q \in M_h\}$，我们给出(8.4.9)的误差估计.

引理 8.4.2 设 H_1 对 $\sigma = 2$ 成立. 若(8.4.10)式成立，则当 $(u,p), (u_h, p_h)$ 分别是(8.4.6)和(8.4.9)的解时，下述估计

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leqslant C \Bigg\{ &\left(1 + \frac{1}{\alpha_h}\right) \inf_{v_h\in V_h} \|u - v_h\|_{1,2,\Omega} \\ &+ \inf_{q_h\in M_h} \|p - q_h\|_{0,2,\Omega} \\ &+ \sup_{0\neq w_h\in\mathring{V}_h} \frac{|f(w_h) - \nu a(u, w_h) + b(w_h, p)|}{\|w_h\|_{1,2,\Omega}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{8.4.21}$$

$$\|p - p_h\|_{0,2,\Omega} \leqslant C\left(1 + \frac{1}{\alpha_h}\right)\left\{\inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,2,\Omega}\right.$$

$$+ \frac{1}{\alpha_h} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,2,\Omega}$$

$$\left. + \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{|f(w_h) - \nu a(u, w_h) + b(w_h, p)|}{\|w_h\|_{1,2,\Omega}}\right\}, \quad (8.4.22)$$

对足够小的 h 成立。

证明 记 $w_h = P_h u - u_h$，由定理 7.1.5 得

$$\|w_h\|_{1,2,\Omega}^2 \leqslant C\nu a(w_h, w_h)$$

$$= C\{\nu a(u - P_h u, w_h) + f(w_h) - \nu a(u, w_h)\}.$$

$$\forall q_h \in M_h, b(w_h, q_h) = b(P_h u - u_h, q_h)$$

$$= b(u, q_h) - b(u_h, q_h) = 0,$$

所以 $w_h \in \mathring{V}_h$，进而

$$\|w_h\|_{1,2,\Omega}^2 \leqslant C\{\nu|a(u - P_h u, w_h)| + \inf_{q \in M_h} |b(w_h, p - q_h)|$$

$$+ |f(w_h) - \nu a(u, w_h) + b(w_h, p)|\}$$

$$\leqslant C\{\|u - P_h u\|_{1,2,\Omega}\|w_h\|_{1,2,\Omega} + \inf_{q \in M_h} \|p - q_h\|_{0,2,\Omega}\|w_h\|_{1,2,\Omega}$$

$$+ |f(w_h) - \nu a(u, w_h) + b(w_h, p)|\}.$$

不妨设 $\|w_h\|_{1,2,\Omega} \neq 0$，由

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leqslant \|u - P_h u\|_{1,2,\Omega} + \|w_h\|_{1,2,\Omega}$$

及(8.4.13)式推出(8.4.21)式成立。

$\forall q_h \in M_h$，(8.4.10) 式给出

$$\|q_h - p_h\|_{0,2,\Omega} \leqslant \alpha_h^{-1} \sup_{v_h \in V_h} \frac{|b(v_h, q_h - p_h)|}{\|v_h\|_{1,2,\Omega}},$$

$$|b(v_h, q_h - p_h)| = |b(v_h, q_h - p) + b(v_h, p) - b(v_h, p_h)|$$

$$= |b(v_h, q_h - p) + b(v_h, p) + f(v_h) - \nu a(u_h, v_h)|$$

$$= |b(v_h, q_h - p) + \nu a(u - u_h, v_h) + f(v_h) + b(v_h, p)$$

$$- \nu a(u, v_h)| \leqslant C\{(\|p - q_h\|_{0,2,\Omega}$$

$$+ \|u - u_h\|_{1,2,\Omega})\|v_h\|_{1,2,\Omega} + |f(v_h)$$

$$+ b(v_h, p) - \nu a(u, v_h)|.$$

利用(8.4.21)式和三角不等式推出(8.4.22)式，证毕。

如果 $\inf_h \alpha_h > 0$ 则称 $\{V_h, M_h\}$ 满足 BB 条件. 对于 Stokes 方程组的有限元方法(8.4.9),我们给出基本假设 SH: 1) H_1对 $\sigma=2$ 成立,且存在整数 $r_4 \geqslant 1$使得 $\sum_K^1$ 通过 (r_4-1) 阶强 F-E 检验;2)不等式(8.4.10)成立;3)存在整数 $r_5 \geqslant 1$ 使得 $\forall q \in W^{r_5,2}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, 有

$$\inf_{q_h \in M_h} \|q - q_h\|_{0,2,\Omega} \leqslant C h^{r_5} |q|_{r_5,2,\Omega}. \tag{8.4.23}$$

我们在 SH 成立下,给问题(8.4.9)解的收敛性和误差估计.

定理 8.4.2 假设 SH 成立,则 1)如果 BB 条件成立,则当 $(u,p),(u_h,p_h)$ 分别是问题(8.4.6)和(8.4.9)的解时,

$$\lim_{h\to 0}(\|u-u_h\|_{1,2,\Omega} + \|p-p_h\|_{0,2,\Omega}) = 0;$$

2)存在与 h,u,p 无关的常数 C, 当 $(u,p) \in (W^{r,2}(\Omega))^n \times W^{\bar{r},2}(\Omega)$ 时有

$$\|u-u_h\|_{1,2,\Omega} \leqslant C \left\{\left(1+\frac{1}{\alpha_h}\right)\sum_{i=1}^{4} h^{r_i}|u|_{r_i+1,2,\Omega} + \sum_{i=3}^{5} h^{r_i}|p|_{r_i,2,\Omega}\right\}, \tag{8.4.24}$$

$$\|p-p_h\|_{0,2,\Omega} \leqslant C \left\{\left(1+\frac{1}{\alpha_h}\right)\frac{1}{\alpha_h}\sum_{i=1}^{4} h^{r_i}|u|_{r_i+1,2,\Omega} + \left(1+\frac{1}{\alpha_h}\right)\sum_{i=3}^{5} h^{r_i}|p|_{r_i,2,\Omega}\right\}, \tag{8.4.25}$$

其中

$$r = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\{r_i+1\}, \bar{r} = \max_{3\leqslant i\leqslant 5} r_i.$$

证明 当 SH 成立时,

$$\lim_{h\to 0} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,2,\Omega} = 0,$$

由(8.4.23)推得

$$\lim_{h\to 0} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_{0,2,\Omega} = 0.$$

而线性连续泛函

$$l(v) = f(v) - \nu(a,v) + b(v,p), \forall v \in (L^{1,2}(\Omega))^n$$

满足 $l(v)=0, \forall v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n$. 由定理 7.1.2 可知 $\{(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n, V_h\}$ 是弱闭的，由引理 8.1.2 推得

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\neq v_h\in V_h}\frac{|l(v)|}{\|v_h\|_{1,2,\Omega}}=0.$$

由引理 8.4.2 证得定理的结论 1).

利用引理 8.4.2 的估计及定理 8.2.3 的证明方法可证得定理的结论 2) 成立. 证毕.

由上面的讨论可以看出，有限元方法的解收敛的关键条件之一是不等式(8.4.10). 找出满足这一不等式的单元是不易的，验证 BB 条件就更困难一些. 由误差估计可以看出，V_h 和 M_h 好一点取法是 V_h 若是取分片 $t(\geqslant 1)$ 次多项式，M_h 最好取 $(t-1)$ 次多项式. 对于这样的取法，要验证 BB 条件成立是需要一定的技巧的. 下面我们给出两个满足 BB 条件的例子，更多的例子请读者查阅[2,41,52,55]. 设 $n=2$.

例 8.4.1 W_h^1 取第五章的 SLN1 元，$M_h=\{q\,|\,q\in L_0^2(\Omega), q|_K\in P_0(K), \forall K\in K_h\}$.

例 8.4.2 W_h^1 取 RQC4 元，M_h 同例 8.4.1.

可以验证这两个例子满足 SH. 以例 8.4.2 为例验证. 在 RQC4 元中的 $\Pi_K^0, \Pi_{\partial K}$ 中，将节点参数的函数值 $v(a_i)$ 改成 v 在该边的积分平均值，这样构造有限元空 $W_h^1(\mathring{W}_h^1)$ 与 RQC 4 元的一致，而且使得 H_1 当 $\sigma=2$ 时成立. 同时存在与 h 无关的常数 C 使得

$$\|\Pi_h^1 w\|_{1,2,\Omega}\leqslant C\|w\|_{1,2,\Omega},\quad \forall w\in\mathring{W}^{1,2}(\Omega). \tag{8.4.26}$$

$\forall q\in M_h\subset L_0^2(\Omega)$，不等式(8.4.8)推得，存在 $v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^2$ 满足

$$\begin{cases} q=\nabla\cdot v, \\ \|v\|_{1,2,\Omega}\leqslant C\|q\|_{0,2,\Omega}. \end{cases} \tag{8.4.27}$$

$\forall K\in K_h$，$\Pi_{\partial K}v_i$ 在 K 的每边上的积分平均值与 v_i 在该边上的积分平均值相等. 所以

$$\int_K q\nabla\cdot v\,dx=\int_{\partial K} qv\cdot N\,ds$$

$$-\int_{\partial K}\sum_{i=1}^{2} q\Pi_{\partial K}v_i N_i ds = \int_K q\nabla\cdot\Pi_h^1 v dx, \qquad (8.4.28)$$

其中 $\Pi_h^1 v = (\Pi_h^1 v_1, \cdots, \Pi_h^1 v_h)^T$. 进而

$$\|q\|_{0,2,\Omega} = \frac{b(v,q)}{\|q\|_{0,2,\Omega}} \leqslant C\frac{b(v,q)}{\|v\|_{1,2,\Omega}} \leqslant C\frac{b(\Pi_h^1 v,q)}{\|\Pi_h^1 v\|_{1,2,\Omega}}.$$

所以 BB 条件成立.

§8.5 弹性力学方程组的有限元方法

设 Ω 是 R^n 中的有界域. $\forall v = (v_1 \cdots, v_n) \in (W^{1,2}(\Omega))^n$, 定义

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(v) = \varepsilon_{ji}(v) = \dfrac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i), 1 \leqslant i,j \leqslant n. \\ \sigma_{ij}(v) = \sigma_{ji}(v) = \lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{kk}(v)\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(v), \ 1 \leqslant i,j \leqslant n, \end{cases} \qquad (8.5.1)$$

其中 λ, μ 是正常数,力学上称为 Lamè 常数, 称 v 是位移, ε_{ij}, σ_{ij} 是相应于位移 v 的应变分量和应力分量. 设 $f \in (L^2(\Omega))^n$,则线性弹性力学方程组的齐次 Dirichlet 问题可描述如下: 求 $u \in (W^{2,2}(\Omega))^n$ 满足

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_j \sigma_{ij}(u) = f_i, 1 \leqslant i \leqslant n, \ 在 \Omega 内, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (8.5.2)$$

对于 $w \in (L^{1,2}(\Omega))^n$, 定义

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(w) = \varepsilon_{ji}(w) = \dfrac{1}{2}(w_i^{e_j} + w_j^{e_i}), 1 \leqslant i,j \leqslant n, \\ \sigma_{ij}(w) = \sigma_{ji}(w) = \lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{kk}(w)\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(w), 1 \leqslant i,j \leqslant n. \end{cases} \qquad (8.5.3)$$

不难看出 $w \in (W^{1,2}(\Omega))^n$, 定义(8.5.3)与(8.5.1)一致. $\forall v, w \in$

$(L^{1,2}(\Omega))^n$，定义

$$a(v,w)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)dx, \tag{8.5.4}$$

$$f(v)=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}f_i v_i^0 dx. \tag{8.5.5}$$

则问题(8.5.2)的弱形式是

$$u\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n, a(u,v)=f(v), \forall v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n. \tag{8.5.6}$$

不难验证 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $(L^{1,2}(\Omega))^n$ 上的对称双线性连续泛函. 关于 $a(\cdot,\cdot)$ 的 $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n$ 弱强制性，通过下述 Korn 不等式得到

$$\forall v\in(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))^n, \|v\|_{1,2,\Omega}^2\leqslant Ca(v,v). \tag{8.5.7}$$

由此和 Lax-Milgram 引理立即可得问题(8.5.6)的唯一可解性. 不等式(8.5.7)的证明可参见[33]或[51].

现在设 Ω 是有界多胞形域，问题(8.5.2)的有限元方法是

$$u_h\in(\mathring{W}_h^1)^n, a(u_h,v_h)=f(v_h), \forall v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n. \tag{8.5.8}$$

问题(8.5.8)的唯一可解性及收敛性的讨论用前几节的方法处理有一定的困难，因为到目前为止，下述广义 Korn 不等式

$$\|v_h\|_{1,2,\Omega}^2\leqslant Ca(v_h,v_h), \forall v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n. \tag{8.5.9}$$

是否成立没有得以证实. 即使 H_1 成立，也不一定得到(8.5.9). 例如 SLN1 元就不满足(8.5.9)式. 所以对前几节的方法要做一些修改. 首先要修改的是关于 $\sum_K^1$ 的基本假设 H_1.

$\forall K\in\mathscr{K}$，设 $N_K^{e_1}=\cdots=N_K^{e_n}$; $\forall v\in(C^1(K))^n$，记 $\Pi_K^{e_j}v_j+\Pi_K^{e_i}v_i$ 在 $N_K^{e_1}$ 的基 $\{p_{l,K}^{e_1}, 1\leqslant l\leqslant L_{e_1}\}$ 下的坐标向量为 $\gamma_{ij}(v)$，定义

$$\begin{cases}\gamma_K(v)=(\gamma_{11}(v)^T,\cdots,\gamma_{1n}(v)^T,\gamma_{22}(v)^T,\cdots,\\ \qquad \gamma_{2n}(v)^T,\cdots,\gamma_{nn}(v)^T)^T,\\ \phi_K(v)=(\phi_K^1(v_1)^T,\cdots,\phi_K^1(v_n)^T)^T.\end{cases} \tag{8.5.10}$$

则由(5.3.5)式可得

$$A_K^E\gamma_K(v)=Q_K^E\phi_K(v), \tag{8.5.11}$$

其中 A_K^E 是对称正定阵.

关于 $\sum_K^1$ 的基本假设改为下述 $\tilde{\mathrm{H}}_1$: 1) $\sum_K^1$ 具有仿射连续性，尺度不变性，逼近性 ($\sigma = 2$) 且通过 ($\gamma_4 - 1$) 阶强 F-E 检验 ($\gamma_4 \geqslant 1$); 2) $\forall K \in \mathscr{K}, Q_K^0$ 的秩是 $nM_1 - n(n+1)/2$; 3) $\forall K_1, K_2 \in \mathscr{K}$, 若 F 是 K_1 和 K_2 的公共 ($n-1$) 维表面，则 $\forall w \in (C^1(K_1 \cup K_2))^n$, $\Pi_{\partial K_1} w|_F$ 和 $\Pi_{\partial K_2} w|_F$ 都属于 $C(F)$ 且至少在 F 上的两点相等.

2)仍然是单元秩条件,因为对于弹性体，刚体位移(使 $\varepsilon_{ij}(v) = 0$ 的位移 v) 的个数是

$$\frac{n}{2}(n+1).$$

条件 3) 的目的是：当 $w \in (C^1(K_1 \cup K_2))^n$ 是刚体位移时，要使 $\Pi_{\partial K_1} w_i|_F = \Pi_{\partial K_2} w_i|_F$, ($i = 1, 2, \cdots, n$). 所以这一要求可以加以修改。当 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立时,有下述结论.

定理 8.5.1 设 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立,则问题(8.5.8)有唯一解 u_h, 且当问题(8.5.2)的解 $u \in (W^{\gamma,2}(\Omega))^n$ 时,有

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\|\varepsilon_{ij}(u) - \varepsilon_{ij}(u_0)\|_{0,2,\Omega} + \|\varepsilon_{ij}(u) - \varepsilon_{ij}(u_h^0)\|_{0,2,\Omega_h})$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{4} h^{\gamma_i} |u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}. \tag{8.5.12}$$

进一步若 Ω 是凸的且 $s_1 = 0, n \leqslant 3$, 则当 $u \in (W^{\gamma,2}(\Omega))^n$ 时,有

$$\sum_{j=1}^{n} \|u_j - (u_h)_j^0\|_{0,2,\Omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{4} h^{\gamma_i+1} |u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}, \tag{8.5.13}$$

其中

$$\gamma = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \gamma_i + 1, \ |u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_j|_{\gamma_i+1,2,\Omega}^2.$$

这一定理说明弹性力学方程组的有限元解 u_h 一般只在能量模的意义下得到收敛性。当 Ω 是凸的，$s_1 = 0$, $n \leqslant 3$ 时，若 $u \in (W^{\gamma,2}(\Omega))^n$, 则由不等式(8.5.13)和(7.2.1)可得

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=1} \|D^\beta u_j - D^\beta (u_h)_j^0\|_{0,2,\Omega_h}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{l} h^{\gamma_i} |u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}. \tag{8.5.14}$$

为了证明定理 8.5.1，先要建立与引理 7.1.3 类似结果.

引理 8.5.1 设 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立，则 $\forall \mu \in [1,\infty]$，存在与 F,K,h 无关的常数 C 使得不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_i \Pi_K^0 v_j + \partial_j \Pi_K^0 v_i\|_{0,\mu,K}$$

$$\leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} \|\Pi_K^{ej} v_i + \Pi_K^{ei} v_j\|_{0,\mu,K}, \tag{8.5.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|\Pi_K^0 v_j - \Pi_{\partial K} v_j\|_{0,\mu,\partial K}$$

$$\leqslant C h^{\frac{1}{\mu'}} \sum_{i,j=1}^{n} \|\Pi_K^{ej} v_i + \Pi_K^{ei} v_j\|_{0,\mu,K}. \tag{8.5.16}$$

$\forall v \in (C^1(K))^n, \forall K \in K_h, \forall h \in (0,1)$ 一致成立，不等式

$$\sum_{j=1}^{n} \|\Pi_{\partial K_1} w_j - \Pi_{\partial K_2} w_j\|_{0,\mu,F}$$

$$\leqslant C h^{\frac{1}{\mu'}} \sum_{i,j=1}^{n} (\|\Pi_{K_1}^{ej} w_i + \Pi_{K_1}^{ei} w_j\|_{0,\mu,K_1}$$

$$+ \|\Pi_{K_2}^{ej} w_i + \Pi_{K_2}^{ei} w_j\|_{0,\mu,K_2}), \tag{8.5.17}$$

$\forall w \in (C^1(K_1 \cup K_2))^n$ 成立，这里 $F = K_1 \cap K_2$ 是 K_h 中的单元 K_1 和 K_2 的共公 $(n-1)$ 维表面，当 $F \subset \partial\Omega \cap K_1$ 是 K_1 的 $(n-1)$ 维表面时，取 $K_2 \subset R^n - \Omega$.

这一引理的证明与引理 7.1.3 的证明几乎一样，只是单元秩条件换了. 请读者自行给出证明，或者见文[34].

定义 $(L^{1,2}(\Omega))^n$ 上的一个半范 $|\cdot|_E$ 如下：

$$|v|_E^2 = a(v,v), \forall v \in (L^{1,2}(\Omega)). \tag{8.5.18}$$

由不等式(8.5.7)，$|\cdot|_E$ 是 $(\mathring{W}^{1,2}(\Omega))$ 上的范数. 当 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立时，$|\cdot|_E$ 是 $(\mathring{W}_h^1)^n$ 上的范数. 当 $v_h \in (\mathring{W}_h^1)^n$ 时，存在 $v \in (C^1(\Omega))^n$，

$D^\beta v_i|_{\partial\Omega}=0, |\beta|=1, i=1,\cdots,n$, 使得 $(v_h)_i=\Pi_h^1 v_i$. 若 $|v_h|_E=0$, 则 $\Pi_K^{e_i} v_i+\Pi_K^{e_j} v_j=0$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, $K\in K_h$. 由不等式(8.5.15)～(8.5.17)得 $\Pi_K^0 v_i|_{\partial K}=\Pi_{\partial K} v_i, \partial_i \Pi_K^0 v_j+\partial_j \Pi_K^0 v_i=0$, 进而 $D^\beta \Pi_K^0 v_i=0$, $1\leqslant i\leqslant n$, $|\beta|=2$. 由不等式(8.5.17)可知 $\Pi_h^1 v_i\in C_0(\Omega)$, 所以 $\Pi_K^0 v_i$ 在 Ω 上是一个一次多项式, 由 $\Pi_h^1 v_i|_{\partial\Omega}=0$ 得 $\Pi_h^1 v_i=0$. 这样就证明了

引理 8.5.2 设 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立, 则 $|\cdot|_E$ 是 $(\mathring{W}_h^1)^n$ 上的范数, 于是问题(8.5.8)有唯一解.

利用定理 8.1.2 的证明方法可得下述结论.

引理 8.5.3 设 $\tilde{\mathrm{H}}_1$ 成立, 则

$$|u-u_h|_E\leqslant C\left\{\inf_{v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n}|u-v_h|_E+\sup_{0\neq v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n}\frac{|a(u,v_h)-f(v_h)|}{|v_h|_E}\right\}. \tag{8.5.19}$$

现在给出定理 8.5.1 的证明. 设 $u\in(W^{\gamma,2}(\Omega))^n$, 由引理 7.1.1 和引理 7.1.2 得

$$\inf_{v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n}|u-v_h|_E\leqslant C\sum_{i=1}^{3}h^{\gamma_i}|u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}. \tag{8.5.20}$$

利用引理 8.5.1 和定理 8.2.3 的证明方法得

$$\forall v_h\in(\mathring{W}_h^1)^n, |a(u,v_h)-f(v_h)|\leqslant C\sum_{i=3}^{4}h^{\gamma_i}|u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}|v_h|_E. \tag{8.5.21}$$

综合(8.5.19)—(8.5.21)得

$$|u-u_h|_E\leqslant C\sum_{i=1}^{4}h^{\gamma_i}|u|_{\gamma_i+1,2,\Omega}. \tag{8.5.22}$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的定义可知

$$a(u-u_h,u-u_h)\geqslant C\sum_{i,j=1}^{n}\|\varepsilon_{ij}(u)-\varepsilon_{ij}(u_h)\|_{0,2,\Omega}^2,$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\varepsilon_{ij}(u) - \varepsilon_{ij}(u_h)\|_{0,2,\Omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{4} h^{r_i} |u|_{r_i+1,2,\Omega}. \tag{8.5.23}$$

由此可得(8.5.12)式。利用 Aubin-Nitsche 技巧可证得(8.5.13)式。定理 8.5.1 得证。

本章讨论的均是线性定常微分方程的齐次 Dirichlet 边值问题，对于非齐次 Dirichlet 边值问题，Neumann 边值问题及其它边值问题，也可以得到相同的结论。有限元方法在许多领域取得了成功，在本书未涉及的问题，例如抛物和双曲型微分方程，非线性微分方程等等，都可以应用本书给出的有限元空间及其基本性质，关于这些工作可查阅相应的文献。

另外，对于同一个微分方程边值问题，例如问题 8.2.1，还有不同于问题 8.2.7 的有限元方法：混合有限元方法，位移杂交元方法，广义杂交应力元方法等。本书未对它们进行介绍。其中位移杂交元方法可以转化成问题 8.2.7 的形式，其它方法已把问题 8.2.1 转化另外形式的方程组，所得到弱解形式的变分问题形同问题 8.1.17，对此类问题也可应用本书给出的有限元空间。此外，在一定条件下，它们可化为问题 8.2.7 的形式[35]。详细内容可见相应的文献。

参 考 文 献

[1] 卞学璜，杂交/混合有限元法的最新进展，应用数学与计算数学，Vol.1, 26—33 (1984).

[2] Bratianu, C., Ying, L. A.(应隆安) and Atluri, S. N., Analysis of Stokes flow by a hybrid method, Finite Element in Fluids, Vol. 5, 27—43, John Wiley & Sons Limited, 1984.

[3] 陈万吉，刘迎曦，拟协调元与广义变分原理，大连工学院学报，Vol. 20, No. 3, 71—80 (1981).

[4] 陈万吉，刘迎曦，唐立民，拟协调元列式，大连工学院学报，Vol.19, No. 2, 37—49 (1980).

[5] 陈万吉，唐立民，等参拟协调元，大连工学院学报，Vol. 20, No. 1, 63—74 (1981).

[6] 冯康，论间断有限元的理论，计算数学，Vol. 1, No. 4, 378—385 (1979).

[7] Han Houde(韩厚德), A finite element aproximation of Navier-Stokes equations using nonconforming elements, *JCM*, Vol. 2, No. 1, 57—88 (1984).

[8] Han Houde (韩厚德),A analysis of penalty-nonconforming finite element method for Stokes equations, *JCM*, Vol. 4, No. 2, 164—172 (1986).

[9] 黄明游，发展方程的有限元方法，上海科学技术出版社，1988.

[10] 蒋和洋，用拟协调元方法推导高精度三角形板弯曲单元，大连工学院学报，Vol. 20, 增刊 2, 21-28(1981).

[11] 蒋和洋，拟协调模式非线性有限元，计算结构力学及其应用，Vol. 1, No. 2, 49—60 (1984).

[12] 钱伟长，变分法与有限元，上册，科学出版社，1980.

[13] Shi Zhong-ci (石钟慈), The generalized patch test for Zienkiewicz triangles, *J. Comput. Math.*, Vol. 2, 391—405 (1984).

[14] 石钟慈，两种不协调板元的统一函数形式，计算数学，Vol 8, No. 4, 428—434 (1986).

[15] Shi Zhong-ci (石钟慈), The F-E-M-Tset for the convergènce of nonconforming finite elements, *Math. Comput.*, Vol. 49, 391—405(1987).

[16] 石钟慈，关于九参数拟协调板元，计算数学，Vol.10, No. 1, 100—106 (1988).

[17] 石钟慈，关于 Morley 元的误差估计，计算数学，Vol. 12, No. 2, 113—118 (1990).

[18] 石钟慈，陈绍春，九参数拟协调元的直接分析，计算数学，Vol. 12, No. 1, 76—84 (1990).

[19] 唐立民，有限元分析的若干基本问题，大连工学院学报，Vol. 18 (1979).

[20] 唐立民，陈万吉，刘迎曦，有限元分析中的拟协调元，大连工学院学报，Vol. 19, No. 2, 19—35 (1980).

[21] 唐立民，刘迎曦，拟协调罚有限元法，计算结构力学其及应用，Vol. 1, No. 3,

1—15 (1984).

[22] 屠规彰，秦孟兆，Euler-Lagrange 方程的判别准则，数学学报，Vol.24. No. 2, 190—206 (1981).

[23] 王鸣，关于广义分片检验的注记，大连工学院学报，Vol. 23, No. 3, 127—129 (1984).

[24] 王鸣，定常 Navier-Stokes 方程组的惩罚有限元方法，大连工学院学报，Vol. 25, 增刊，7-13(1986).

[25] Wang Ming (王鸣), A new approach to the upwind finite element, 数学研究与评论，Vol. 7, No. 1, 124 (1987).

[26] 王鸣，定常 Stokes 问题的罚函数有限元方法，计算数学，Vol.9, No. 3, 309—318 (1987).

[27] Wang Ming (王鸣), Finte element method for a class of nonlinear problems I-Abstract results, 数学研究与评论，Vol. 7, No. 4, 671—680 (1987).

[28] Wang Ming (王鸣), Finte element method for a class of nonlinear problems II-Applications, 数学研究与评论，Vol. 8, No. 3, 427—438 (1988).

[29] 王鸣，关于分片检验的若干讨论，计算结构力学及其应用，Vol.5, No. 4, 115—117 (1988).

[30] 王鸣，关于非协调有限元空间最大模的不等式，计算数学，Vol.12, No. 1 104—107 (1990).

[31] 王鸣，有限元空间的迹嵌入性质和紧致性，数学研究与评论，Vol. 10, No. 2, 187—194 (1990).

[32] 王鸣，拟协调元是什么？，计算数学，Vol. 12, No. 2, 206—207 (1990).

[33] 王鸣，张鸿庆，广义 Korn-Poincare 不等式及其应用 I, 科学探索，Vol. 2, No. 3, 83—92 (1982).

[34] Wang Ming, Zhang Hongqing (王鸣，张鸿庆), On the convergence of quasi-conforming elements for linear elasticity problem. *JCM*, Vol.4, No. 2, 131—145 (1986).

[35] 王鸣，张鸿庆，关于几种有限元方法的注记，计算数学，Vol. 8, No. 3, 303—313 (1986).

[36] 王鸣，张鸿庆，平面定常 Navier-Stokes 方程组的有限元方法，大连工学院学报，Vol. 25, 增刊，1-6(1986).

[37] 王鸣，张鸿庆，有限元空间的嵌入性质和紧致性，应用数学和力学，Vol.9, No. 2, 127—134 (1988).

[38] 吴颂平，两种矩形单元的 Babuska-Brezzi 条件，计算数学，Vol. 8, No. 4, 395—404 (1986).

[39] 应隆安，粘性不可压缩流体运动的有限元法，数学进展，Vol 12, No. 2, 124—132 (1983).

[40] Ying Longan (应隆安), Numerical analysis of Navier-Stokes equations by a hybrid finite element methods, *JCM*, Vol. 2, No. 4, 331—343 (1984).

[41] Ying Longan (应隆安), The convergence of a mixed finite element method for steady convective incompressible vixcous flow, *Computa-*

tional Mechanics, Vol. 2, No. 1, 45—53 (1987).

[42] Ying Longan (应隆安) and Atluri, S. N., A hybrid finite element method for Stokes flow, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 36, No. 1, 39—60 (1983).

[43] Zhang Hongqing (张鸿庆), The generalized patch test and 9-parameter quasi-conforming elememt, Proc.the Sino-France Symposium on Finite Element Methods (ed. Fang K), 566—583, Science Press, Gordan and Breach, 1983.

[44] 张鸿庆,多套函数广义分片检验和12参拟协调元，大连工学院学报，Vol. 21, No. 3, 11—19 (1982).

[45] Zhong Hongqing, Wang Ming (张鸿庆，王鸣), Finite element approximations with multiple sets of functions and quasi-conforming elements, in Proc. the 1984 Beijing Symp. on Diff. Geometry and Diff. Equations (Ed. Feng Kang), 354—365, Science Press, Beijing, 1985.

[46] 张鸿庆,王鸣，多套函数有限元逼近与拟协调板元，应用数学和力学，Vol. 6, No. 1, 41—52 (1985).

[47] 张鸿庆，王鸣，拟协调元空间的紧致性和拟协调元法的收敛性，应用数学和力学，Vol. 7, No. 5, 409—423 (1986).

[48] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[49] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO*, *Anal. Numer*. *R*-2, 129—151 (1984).

[50] Ciarlet, P. C., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amesterdam, New York, 1978.

[51] Fichera, G., Existence Theorems in Elasticity, Handbuch der Physik, Encyclopedia of Physics, Band VI, 12, 347—389, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

[52] Giault, V., Raviart, P. A., Finte Element Approximation of the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Math., 749, Springer-Verlag, Heidelberg 1979.

[53] Lascaux, P., Lesaint, P., Some nonconforming finite elements for the plate bending problem, *RAIRO*, *Anal. Numer.*, *R*-1 9—53 (1985).

[54] Lions, J. L. and Magenes E., Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. 1, Springer, Berlin, 1972.

[55] Oden, J. T., RIP-methods for Stokesian flow, Finite Element in Fluids, Vol. 4, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[56] Oden, J. T. and Reddy, J. N., An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, Wiley Intersecence, New York, 1986.

[57] Oden, J. T., and Reddy, J. N., Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.

[58] Quarteroni, A., Primal hybrid finite element methods for 4th order elliptic equations, *Calcolo*, Vol. 16, No. 1, 21—58 (1979).

[59] Raviart, P.A., and Thomas, J. M., Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations, *Math. Comp.*, Vol.31, No. 138, 391—

413 (1977).

[60] Strang, G.,and Fix, G. J., An Analysis of the Finite Element Methods, Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, 1972.

[61] Stummel, F., The limitation of the patch test, *Inter. J. Nmer. Methods Eng.*, Vol. 15, 177—188 (1980).

[62] Stummel, F., The generalized patch test, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 16, 449—471 (1979).

[63] Stummel, F.,Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces, *RAIRO, Anal. Numer.*, Vol. 4, No. 1, 81—115 (1980).

[64] Temann, R., Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[65] Лалыженская, O.A., 粘性不可压缩流体动力学的数学问题(张开明译),上海科技出版社,1963.

[General Information]
书名=有限元的数学理论
作者=张鸿庆 王鸣
页数=377
SS号=10070619
DX号=
出版日期=1991年12月第1版
出版社=科学出版社